MAT0315 - Introdução à Análise Real

IME-USP, 2° Semestre de 2013

Constante de Euler

Consideremos as sequências (A_n) e (B_n) definidas por

$$A_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx, \quad B_n = A_n + \frac{1}{n}, \ n \geq 2.$$

Podemos interpretar A_n como sendo a área da região acima do gráfico de $f(x) = 1/x$, $1 \leq x \leq n$, e dentro de $(n-1)$ retângulos de base 1 colocados acima do gráfico na maneira que se usa para obter aproximações da área por excesso (tente fazer uma figura só com esta dica).

Daí temos:

$$A_{n+1} - A_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx.$$

Como $\frac{1}{x} < \frac{1}{n}$ se $n < x \leq n+1$, segue que $A_{n+1} - A_n > 0$ para todo $n \geq 2$. Em seguida, observemos que

$$B_{n+1} - B_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + A_{n+1} - A_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx.$$

Como $\frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$ se $n \leq x < n+1$, segue que $B_{n+1} - B_n < 0$ para todo $n \geq 2$.

Logo, temos $A_2 \leq A_n < A_{n+1} < B_{n+1} < B_n \leq B_2$ para todo $n \geq 2$ e $\lim(B_n - A_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$. Assim, existe γ satisfazendo $A_n < \gamma < B_n$ para todo $n \geq 2$ e $\lim A_n = \lim B_n = \gamma$. Esta constante é chamada de *constante de Euler*, vale aproximadamente 0,577 e não se sabe se ela é racional ou irracional.

Expressando a integral como um logaritmo neperiano, vem:

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma.$$