Seja E um espaço de Banach. Um operador linear $T : E \to E$ é *compacto* se leva qualquer sequência limitada em uma sequência que tem subsequência convergente. Todo operador compacto é limitado, pois leva sequências limitadas em sequências limitadas. De fato, se $(x_n)_n$ for limitada e $(Tx_n)_n$ não for, então $(x_n)_n$ tem uma subsequência (x'_n) tal que $||Tx'_n|| \to \infty$ e portanto $(Tx'_n)_n$ não tem subsequência convergente.

Seja $T_n : E \to E$ uma sequência de operadores compactos que converge em norma para T. Vamos provar que T é compacto.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E. Podemos dela extrair subsequências $(x^k_n)_n$, $k \in \mathbb{N}$ tais que:

(1) Para cada k, $(x^{k+1}_n)_n$ é subsequência de $(x^k_n)_n$ e

(2) Para cada k, $(T_k x^k_n)_n$ converge, $\lim_n T_k x^k_n = y_k$.

Defina $z_n = x^n_n$, $n \in \mathbb{N}$. Para cada k, a sequência $(z_n)_{\{n;n\geq k\}}$ é uma subsequência de $(x^k_n)_{\{n;n\geq k\}}$. Logo, para todo k, $\lim_n T_k z_n = y_k$.

Seja M o supremo de $\{||x_n||;\ n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\epsilon > 0$, seja K inteiro tal que $||T_k - T_l|| < \frac{\epsilon}{3M}$ se k e l forem maiores que K. Dados dois inteiros k e l maiores que K, tome um inteiro n tal que $||T_k z_n - y_k|| < \frac{\epsilon}{3}$ e $||T_l z_n - y_l|| < \frac{\epsilon}{3}$. Então:

$$||y_k - y_l|| \leq ||y_k - T_k z_n|| + ||T_k - T_l||\,||z_n|| + ||y_l - T_l z_n|| < \epsilon$$

Logo, $(y_k)_k$ é de Cauchy e, portanto, convergente: $\lim_k y_k = y$.

Tome novamente um $\epsilon > 0$ arbitrário e escolha um k inteiro tal que $||T - T_k|| < \frac{\epsilon}{3M}$ e $||y - y_k|| < \frac{\epsilon}{3}$. Daí, escolha inteiro N tal que, para todo $n > N$, $||T_k z_n - y_k|| < \frac{\epsilon}{3}$. Então, se $n > N$, temos

$$||y - Tz_n|| \leq ||y - y_k|| + ||y_k - T_k z_n|| + ||T_k - T||\,||z_n|| < \epsilon$$

Isto mostra que $Tz_n \to y$, e portanto $(Tx_n)_n$ possui subsequência convergente.