LEI DA REFRAÇÃO (USP – MAT 2110 – 2015)

Uma partícula viaja em um plano do ponto A até o ponto B. No caminho, atravessa uma reta r. Sua trajetória é retilínea em cada um dos semiplanos. Antes de atravessar a reta, sua velocidade é constante e igual a v_1; depois de atravessar a reta, a velocidade é constante e igual a v_2. Para minimizar o tempo do percurso, em que ponto a partícula deve atravessar a reta?

Diversas interpretações físicas podem ser dadas a este problema. Por exemplo, a partícula pode ser um fóton que atravessa um plano separando ar e água, ou ar e vidro; ou essa partícula ideal pode estar, apenas aproximadamente, representando um atleta que corre sobre o solo de A até um ponto da margem de um rio (reto e sem correnteza) e, de lá, nada até o ponto B.

Para começar a resolver o problema, primeiro fixaremos os valores de alguns parâmetros e definiremos uma variável independente x que determinará o ponto da reta atravessado pela partícula. Depois, calcularemos o tempo T do percurso de A até B em função de x, e "minimizaremos" $T(x)$.

Denotemos por A' e B' as projeções ortogonais dos pontos A e B sobre a reta r e chamemos de d a distância entre eles (que supomos ser positiva). Sejam h_1 e h_2, respectivamente, as distâncias dos pontos A e B à reta r. Consideremos agora a reta r como sendo um eixo de coordenadas, definidas de modo que A' corresponda ao número real zero e B' ao número real d. Seja P o ponto de r que é atravessado pela partícula, seja x sua coordenada; isto é, x é igual à distância de A' a P, caso P pertença à semirreta determinada por A' à qual também pertence B', e x é igual ao negativo dessa distância, no caso contrário.

Como o triângulo $AA'P$ é retângulo em A', a distância percorrida pela partícula antes de atravessar a reta r é igual a $\sqrt{x^2+h_1^2}$ e o tempo gasta nesse trecho do percurso é portanto $\frac{\sqrt{x^2+h_1^2}}{v_1}$. Por um argumento muito parecido, temos que o tempo gasto pela partícula entre a reta r e o ponto B é igual a $\frac{\sqrt{(d-x)^2+h_2^2}}{v_2}$. Um momento de reflexão, com a ajuda de uma figura, convencerá o leitor de que essas fórmulas são válidas para todo $x \in \mathbb{R}$, independentemente da posição de P relativa aos pontos A' e B'. O tempo total de percurso T é igual à soma desses dois tempos que acabamos de calcular. Nosso problema foi, portanto, reduzido a minimizar a função

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2+h_2^2}}{v_2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se a função T tiver um ponto de mínimo (global), ele será um ponto x_0 satisfazendo $T'(x_0) = 0$, ou seja,

(1)
$$\frac{1}{v_1}\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+h_1^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{d-x_0}{\sqrt{(d-x_0)^2+h_2^2}} = 0$$

e, portanto,

(2)
$$\frac{x_0}{d-x_0} = \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{\sqrt{x_0^2+h_1^2}}{\sqrt{(d-x_0)^2+h_2^2}}.$$

O segundo membro de (2) é positivo, logo, o primeiro também é, o que implica que $0 < x_0 < d$. Denotando por P, a partir de agora, o ponto da reta r associado ao número real x_0 e sabendo que $0 < x_0 < d$, podemos afirmar que x_0 é igual ao comprimento do segmento $\overline{A'P}$ e que $d - x_0$ é igual ao comprimento do segmento $\overline{PB'}$. Denotando por θ_1 o ângulo do vértice A no triângulo $AA'P$ e por θ_2 o ângulo do vértice B no triângulo $BB'P$, podemos então re-escrever a equação (1) como

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2}. \tag{3}$$

Note que θ_1 também é igual ao ângulo que a trajetória da partícula faz com a reta perpendicular a r ao incidir em P, enquanto que θ_2 é o ângulo que a trajetória da partícula faz com essa reta normal quando a partícula se afasta de P.

Provamos que, se x_0 é um ponto crítico da função $T(x)$, $x \in \mathbb{R}$, então ele corresponde a um ponto P no interior do segmento $\overline{A'B'}$ e os ângulos θ_1 e θ_2, definidos acima, satisfazem a equação (3). Falta provar matematicamente que existe apenas um ponto crítico e que esse ponto crítico é um ponto de mínimo.

Como $T(x)$ tende a infinito quando x tende a $+\infty$ ou $-\infty$ (isto não é difícil de ver), necessariamente T tem pelo menos um ponto de mínimo (que é necessariamente um ponto crítico). Para provar que existe apenas um ponto crítico (e que portanto ele é o ponto de mínimo), basta provar que T' é uma função crescente em $\mathbb{R}$, pois daí T' será positiva à direita do ponto de mínimo e negativa à direita.

A maneira mais direta de provar que T' é crescente é provar que $T''(x) > 0$ para todo x. Para evitar uma parte das contas necessárias para isso, vamos seguir um caminho ligeiramente diferente. Note que $T'(x)$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$T'(x) = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} + \frac{1}{v_2}\frac{x-d}{\sqrt{(x-d)^2 + h_2^2}}, \quad , x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Para mostrar que T' é crescente, basta mostrar que as duas parcelas no lado direito de (4) são funções crescentes. Para isso, basta provar que, para todo $a > 0$, a função

$$s_a(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

é crescente (pois $T'(x) = \frac{1}{v_1} s_{h_1}(x) + \frac{1}{v_2} s_{h_2}(x - d)$). Mas isso é fácil de provar:

$$s_a'(t) = \frac{\sqrt{a^2 + t^2} - t \cdot \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}}{a^2 + t^2} = \frac{a^2}{(a^2 + t^2)^{3/2}} > 0, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$