

PROPRIEDADE REFLETORA DA PARÁBOLA

SEVERINO TOSCANO DO REGO MELO

USP – MAT 2110 – 2015

Considere dois triângulos retângulos: o primeiro com vértices $(0, \frac{1}{4})$, $(a, \frac{1}{4})$ e (a, a^2) ; o segundo com vértices $(\frac{a}{2}, 0)$, $(a, 0)$ e (a, a^2) . O ângulo reto do primeiro triângulo fica no vértice $(a, \frac{1}{4})$, o do segundo triângulo fica em $(a, 0)$. Seja α o ângulo do primeiro triângulo no vértice (a, a^2) e seja β o ângulo do segundo triângulo também no vértice (a, a^2) .

No primeiro triângulo, o cateto oposto a α mede a , o cateto adjacente a α mede $(a^2 - \frac{1}{4})$ e a hipotenusa mede, portanto,

$$\sqrt{a^2 + \left(a^2 - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{a^2 + a^4 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{16}} = \sqrt{a^4 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{16}} = \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = a^2 + \frac{1}{4}.$$

Daí segue que

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{a^2 + \frac{1}{4}}.$$

No segundo triângulo, o cateto oposto a β mede $\frac{a}{2}$, o cateto adjacente a β mede a^2 e a hipotenusa mede $\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + a^4}$. Daí segue que

$$\text{sen } \beta = \frac{a/2}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + a^4}}, \quad \text{cos } \beta = \frac{a^2}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + a^4}}$$

e, portanto,

$$\text{sen } (2\beta) = 2 \text{sen } \beta \text{cos } \beta = 2 \frac{a/2}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + a^4}} \frac{a^2}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + a^4}} = \frac{a^3}{(\frac{a}{2})^2 + a^4} = \frac{a}{a^2 + \frac{1}{4}}.$$

Como $\text{sen } (2\beta) = \text{sen } \alpha$, segue que $2\beta = \alpha$ e que, portanto, o ângulo formado pelas duas hipotenusas também é β .

Vimos em sala que a reta tangente à curva $y = x^2$ no ponto (a, a^2) tem coeficiente angular $2a$, ou seja, é a reta que contém a hipotenusa do segundo triângulo. Ou seja, provamos que a reta que passa por $(0, \frac{1}{4})$ e (a, a^2) faz com a reta tangente à parábola no ponto (a, a^2) um ângulo igual ao formado pela tangente com uma reta vertical.

Se uma fonte de luz ou de outra radiação for colocada no ponto $(0, \frac{1}{4})$ (que é por isso chamado de foco da parábola) e se a parábola for refletora, todo raio que saia da fonte será portanto refletido verticalmente para cima. Reciprocamente, se se colocar no foco um receptor de ondas luminosas ou de rádio, toda radiação que cair verticalmente sobre o aparato será concentrada no receptor. Isso explica por que se fazem antenas parabólicas e por que o espelho dos faróis de automóveis é parabólico.