CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV

MAT0221 – TURMA 46 – 2° SEMESTRE DE 2012
IME – USP

1. Séries Absolutamente Convergentes

Provamos em sala que, se uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então ela é convergente e a desigualdade $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é satisfeita. Provamos também que, se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente e se $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma bijeção, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ também é absolutamente convergente (daí, em particular, é convergente). Provaremos agora que, neste caso, as somas das duas séries são iguais, isto é, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Vimos em sala o seguinte resultado: se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série convergente, então, para todo $m \geq 1$, as séries $\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n$ também convergem e suas somas satisfazem

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n = 0. \tag{2}$$

Vamos precisar do seguinte resultado, um pouco mais geral que este. Dado um conjunto finito de inteiros F, faz sentido considerar a série $\sum_{n\notin F}^{\infty} b_n$ e ela é convergente ("somamos", na ordem dada, todos os b_n's, exceto um número finito deles). Denotemos por $|F|$ o maior inteiro k tal que $\{1, 2, \cdots k\} \subseteq F$ [1]. Se tomarmos uma família de conjuntos finitos de inteiros $F_1, F_2, \cdots$ tais que

$$\lim_{m\to\infty} |F_m| = +\infty, \tag{3}$$

então

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n\notin F_m}^{\infty} b_n = 0. \tag{4}$$

Notem que a equação (2) é a equação (4) no caso em que $F_m = \{1, 2, \cdots, m\}$. Se $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma bijeção e $F_m = \{\varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(m)\}$, então a equação (3) é satisfeita (convença-se disto!). A demonstração da equação (4) é um exercício numa linguagem um pouco fora do foco principal deste curso e é dada no final deste texto, depois de vermos como ela pode ser aplicada para provar que a soma de uma série absolutamente convergente não muda se seus termos forem rearranjados.

Para provar (5), denotemos por s e t as somas das séries, $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $t = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$, e consideramos a identidade, válida para todos os inteiros positivos n e m,

$$s - t = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_{\varphi(k)}\right) - \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{\varphi(k)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

[1] Se não existir um tal k, pomos $|F| = 0$. Assim temos, por exemplo, $|\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 100\}| = 4$ e $|\{2, 3, 4, 5, 6\}| = 0$

Fixando m e tomando o limite quando n tende a infinito, a expressão entre parêntesis tende para $\displaystyle\sum_{k\notin\{\varphi(1),\varphi(2),\cdots,\varphi(m)\}}^{\infty} a_k$ e a última soma tende a zero. Logo, para todo m, temos

$$s-t=\sum_{k\notin\{\varphi(1),\varphi(2),\cdots,\varphi(m)\}}^{\infty} a_k-\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{\varphi(k)}.$$

Fazendo agora m tender a infinito, as duas somas acima tendem para zero e assim concluímos que $s=t$.

Demonstração de (4): Em primeiro lugar, usemos (2) para as duas séries convergentes $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Assim, dado $\epsilon>0$ arbitrário, existe l inteiro tal que $\displaystyle\sum_{n=l+1}^{\infty}|b_n|<\epsilon/2$ e também $\displaystyle\left|\sum_{n=l+1}^{\infty}b_n\right|<\epsilon/2$. Daí, para todo m tal que $|F_m|>l$ (decorre de (3) que isto vale para todo m maior ou igual a um certo m_0), temos

$$\sum_{n\notin F_m}^{\infty} b_n=\sum_{n=l+1}^{\infty} b_n+\sum_{n\in F_m \text{ e } n>l} b_n$$

A primeira soma do segundo membro desta igualdade tem valor absoluto menor que $\epsilon/2$. Além disso, temos

$$\left|\sum_{n\in F_m \text{ e } n>l} b_n\right|\le\sum_{n\in F_m \text{ e } n>l}|b_n|\le\sum_{n=l+1}^{\infty}|b_n|<\epsilon/2.$$

Ou seja, provamos que

$$\left|\sum_{n\notin F_m}^{\infty} b_n\right|<\epsilon,\quad\forall m\ge m_0.$$

2. Constante de Euler

Nesta seção, provaremos que a equação (7), abaixo, define uma constante que satisfaz $\dfrac{13}{24}\le\gamma\le\dfrac{11}{12}$.

Seja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e decrescente tal que $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$. Para cada inteiro $n\ge1$, defina $a_n=f(n)$ e

$$A_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}-\int_1^n f(x)\,dx.$$

A sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente:

$$A_{n+1}-A_n=a_n-\int_1^{n+1}f(x)\,dx+\int_1^n f(x)\,dx=a_n-\int_n^{n+1}f(x)\,dx>0,$$

pois $f(x)>a_n$ se $n-1\le x<n$. Mostremos agora que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

$$A_n=a_1-\left(\int_1^2 f(x)\,dx-a_2\right)-\left(\int_2^3 f(x)\,dx-a_3\right)-\cdots-\left(\int_{n-2}^{n-1} f(x)\,dx-a_{n-1}\right)-\int_{n-1}^n f(x)\,dx. \tag{5}$$

Como cada expressão entre parêntesis é positiva, vem

$$A_n<a_1-\int_{n-1}^n f(x)\,dx<a_1-a_{n-1}<a_1$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty}A_n\le a_1=f(1). \tag{6}$$

No caso em que $f(x)=1/x$, o limite $\lim_{n\to\infty}A_n$ é a célebre *constante de Euler*, denotada por γ. Provamos portanto que $\gamma\le1$.

Como a_n tende a zero, $\lim_{n\to\infty}(A_n+a_n)=\lim_{n\to\infty}A_n$. Obtemos assim (no caso em que $f(x)=1/x$ e $a_n=1/n$):

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac12+\frac13+\cdots+\frac1n-\ln n\right). \tag{7}$$

A estimativa $\lim_{n\to\infty} A_n \le f(1)$ obtida em (6) será melhorada se exibirmos números positivos menores do que uma (ou algumas) das expressões entre parêntesis em (5). Temos, por exemplo,

$$\int_1^2 f(x)\,dx - a_2 = \int_1^{3/2} f(x)\,dx + \int_{3/2}^2 f(x)\,dx - f(2) =$$

$$\left(\int_1^{3/2} f(x)\,dx - \frac{f(3/2)}{2}\right) + \left(\int_{3/2}^2 f(x)\,dx - \frac{f(2)}{2}\right) + \frac{f(3/2)}{2} + \frac{f(2)}{2} - f(2) < \frac{f(3/2)-f(2)}{2}.$$

Daí vem $A_n < f(1) - \frac{f(3/2)-f(2)}{2} - a_{n-1}$, logo

$$\lim_{n\to\infty} A_n \le f(1) - \frac{f(3/2)-f(2)}{2} \tag{8}$$

No caso em que $f(x) = 1/x$, obtemos:

$$\gamma \le \frac{11}{12}.$$

Obteremos agora uma cota inferior positiva para $\lim_{n\to\infty} A_n$ supondo que mais uma hipótese é satisfeita por f: que ela possui derivada segunda e que $f''(x) < 0$ para todo $x > 0$. Esta hipótese implica que qualquer segmento de reta com extremos no gráfico de f fica acima do gráfico de f. Daí, para cada n, a área que fica abaixo do gráfico de f, acima do eixo dos x e entre $x = n-1$ e $x = n$ é menor que a área do trapézio de vértices $(n-1, 0)$, $(n-1, a_{n-1})$, (n, a_n) e $(n, 0)$, isto é,

$$\int_{n-1}^n f(x)\,dx \,<\, \frac{a_n + a_{n-1}}{2} \tag{9}$$

Este fato, que salta aos olhos como óbvio se fizermos uma figura, pode ser demonstrado integrando-se de $(n-1)$ a n os dois lados da desigualdade

$$f(x) < (a_n - a_{n-1})(x - n) + a_n, \qquad n-1 < x < n.$$

Usando (9) para minorar o lado direito da igualdade (5), vem:

$$A_n > a_1 - \left(\frac{a_1+a_2}{2} - a_2\right) - \left(\frac{a_2+a_3}{2} - a_3\right) - \cdots - \left(\frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2} - a_{n-1}\right) - \frac{a_{n-1}+a_n}{2} =$$

$$= a_1 - \left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2}\right) - \left(\frac{a_2}{2} - \frac{a_3}{2}\right) - \cdots - \left(\frac{a_{n-2}}{2} - \frac{a_{n-1}}{2}\right) - \frac{a_{n-1}}{2} - \frac{a_n}{2} = \frac{a_1}{2} - \frac{a_n}{2}.$$

Passando ao limite (usando que $a_n \to 0$), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} A_n \,\ge\, \frac{f(1)}{2}.$$

No caso em que $f(x) = 1/x$, obtemos:

$$\gamma \ge \frac{1}{2}.$$

Estas duas últimas estimativas podem ser melhoradas se compararmos a área sob o gráfico de f entre dois inteiros consecutivos com a área de dois trapézios com vértices no gráfico em vez de apenas um. Assim, por exemplo,

$$\int_1^2 f(x)\,dx \,<\, \frac{f(1)+f(3/2)}{4} + \frac{f(3/2)+f(2)}{4}.$$

Usando esta estimativa para minorar a primeira expressão entre parêntesis em (5) e usando (9) para as demais, vem

$$A_n \,>\, \frac{a_1}{2} - \frac{a_n}{2} - \left(\frac{f(1)+2f(3/2)+f(2)}{4} - \frac{f(1)+f(2)}{2}\right)$$

Tomando o limite, vem

$$\lim_{n\to\infty} A_n \ge \frac{3a_1}{4} + \frac{a_2}{4} - \frac{f(3/2)}{2}.$$

No caso em que $f(x) = 1/x$, vem

$$\gamma \,\ge\, \frac{13}{24}.$$