O gráfico de $x^{1/x}$ (USP - MAT 2110 - 2015)

Nesta nota vamos recapitular as informações que obtivemos em sala sobre o gráfico da função $f(x) = x^{1/x}$, $x > 0$, e vamos dar uma prova detalhada de que ela tem apenas os dois pontos de inflexão que conjecturamos.

Vimos que $f(x) = x^{1/x}$ tende a 1 quando x tende a $+\infty$ e tende a 0 quando x tende a 0, que f é crescente no intervalo aberto $(0, e)$, decrescente no intervalo aberto $(e, +\infty)$ e seu único ponto crítico ocorre em $x = e$. Além disso, escrevendo

$$f'(x) = \frac{x^{1/x}}{x^2}(1 - \ln x) = \frac{x^{1/x}}{x^3}(x - x\ln x) = \frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{e^{3\ln x}} = e^{\frac{\ln x - 3x\ln x}{x}}(x - x\ln x),$$

e usando que $x \ln x$ tende a 0 quando x tende a 0 (isto segue da Regra de L'Hôspital), vemos que $f'(x)$ tende a 0 quando x tende a 0. O cálculo do limite de $f'(x)$ quando x tende a $+\infty$ é uma aplicação mais previsível da Regra de L'Hôspital, pois já sabemos que o limite no infinito de $x^{1/x}$ é igual a 1:

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{1/x} \cdot \lim_{x\to\ +\infty} \frac{1 - \ln x}{x^2} = 1 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{2x} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

Uma vez que f' é positiva no intervalo aberto $(0, e)$ e tende a zero nos extremos 0 e e, segue que f'' (a derivada de f') tem de se anular em pelo menos um ponto x_1 entre 0 e e. A derivada segunda f'' também tem de se anular em pelo menos um ponto $x_2 > e$, pois $f'(e) = 0$, $f'(x) < 0$ se $x > e$ e $f'(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$.

Nosso objetivo agora é obter informações sobre o sinal de f'' suficientes para provar que f'' se anula em `apenas` dois pontos x_1 e x_2, satisfazendo $0 < x_1 < e < x_2$, e que x_1 e x_2 são pontos de inflexão.

Vimos em sala que

$$f''(x) = \frac{x^{1/x}}{x^4} \cdot [(1 - \ln x)^2 + x(2\ln x - 3)].$$

Seja φ a função definida pela expressão entre colchetes na equação acima. Podemos escrever $\varphi(x) = a(x) + b(x)$, $x > 0$, sendo $a(x) = (1 - \ln x)^2$ e $b(x) = x(2\ln x - 3)$.

O sinal de $a'(x) = 2(\ln x - 1)/x$ é positivo de $x > e$ e é negativo se $x < e$. O sinal de $b'(x) = 2\ln x - 1$ é positivo se $x > \sqrt{e}$ e é negativo se $x < \sqrt{e}$. Logo, o sinal de $\varphi'(x) = a'(x) + b'(x)$ é positivo se $x > e$ e é negativo se $x < \sqrt{e}$ (lembre que $e > \sqrt{e}$) . A verificação das seguintes afirmações fica por conta do leitor:

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = +\infty, \quad \varphi(\sqrt{e}) = \frac{1}{4} - 2\sqrt{e} < 0, \quad \varphi(e) = -e < 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$$

Daí e do fato de que $\varphi'(x) < 0$ se $x < \sqrt{e}$ e $\varphi'(x) > 0$ se $x > e$, segue que existe um único ponto $x_1 < \sqrt{e}$ em que $\varphi(x_1) = 0$ e um único ponto $x_2 > e$ em que $\varphi(x_2) = 0$. Além disso, $\varphi(x)$ muda de sinal em x_1 e em x_2.

Como, para cada x, $f''(x)$ é igual ao número positivo $\frac{x^{1/x}}{x^4}$ multiplicado por $\varphi(x)$, segue que f'' muda de sinal em x_1 e em x_2, que são, portanto, os únicos pontos de inflexão de f fora do intervalo $[\sqrt{e}, e]$.

Para concluir que x_1 e x_2 são os únicos pontos de inflexão de f, basta mostrar que $\varphi(x)$ (e portanto $f''(x)$) é menor do que zero em todos os pontos de $[\sqrt{e}, e]$. A função a é decrescente em $[\sqrt{e}, e]$ e portanto $a(x) \leq a(\sqrt{e}) = \frac{1}{4}$ para todo $x \in [\sqrt{e}, e]$. A função b é crescente em $[\sqrt{e}, e]$ e portanto $b(x) \leq b(e) = -e$ para todo $x \in [\sqrt{e}, e]$. Somando as duas desigualdades, vem:

$$\varphi(x) = a(x) + b(x) \leq \frac{1}{4} - e < 0, \quad \text{para todo} \quad x \in [\sqrt{e}, e]$$

Logo, $f''(x) = \frac{x^{1/x}}{x^4}\varphi(x) < 0$ para todo $x \in [\sqrt{e}, e]$, como queríamos.