DUAS DEFINIÇÕES DE DIFERENCIABILIDADE EM $\mathbb{R}^2$
USP – MAT 2127 – 2015

O objetivo desta nota é mostrar que as definições de diferenciabilidade adotadas nos dois textos da bibliografia, o Stewart e o Guidorizzi, são equivalentes; ou seja, vamos mostrar que sempre que uma função é diferenciável num dos dois sentidos, é também no outro.

A definição usada no Stewart torna mais simples a demonstração da regra da cadeia e a demonstração de que continuidade das derivadas de primeira ordem implica em diferenciabilidade. Por outro lado, é mais fácil decidir se uma função é ou não diferenciável usando a definição adota no Guidorizzi.

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função definida em um aberto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e seja (x_0, y_0) um ponto de D. Pela definição do Stewart, f é *diferenciável* em (x_0, y_0) se existem as derivadas parciais $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ e existem funções ϵ_1 e ϵ_2 tais que

$$(1) \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \epsilon_1(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \epsilon_2(x, y) = 0$$

e, para todo $(x, y) \in D$,

$$(2) \quad f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \epsilon_1(x, y)(x - x_0) + \epsilon_2(x, y)(y - y_0).$$

Suponha que f é diferenciável de acordo com esta definição. Então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - [f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\epsilon_1(x, y)(x - x_0) + \epsilon_2(x, y)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[\epsilon_1(x, y)\frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}\right] + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[\epsilon_2(x, y)\frac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}\right].$$

Agora usamos que o produto de uma função que tende a zero por uma função limitada também tende a zero. Neste caso temos que as funções $\epsilon_1(x, y)$ e $\epsilon_2(x, y)$ tendem a zero quando (x, y) tende a (x_0, y_0). E elas estão multiplicadas por funções limitadas:

$$\left|\frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}\right| \leq 1 \quad \text{e} \quad \left|\frac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}\right| \leq 1, \quad \text{para todo} \quad (x, y) \neq (x_0, y_0).$$

Daí, temos

$$(3) \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - [f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

A equação (3) que acabamos de obter é justamente a definição de f ser diferenciável em (x_0, y_0) adotada pelo Guidorizzi. Provamos portanto que diferenciabilidade *à la Stewart* implica em diferenciabilidade *à la Guidorizzi*. Para provar a afirmação recíproca ("Guidorizzi" $\Longrightarrow$ "Stewart"), suponhamos agora que (3) é satisfeita e provemos que existem ϵ_1 e ϵ_2 satisfazendo (1) e (2). Vamos precisar de usar uns truques algébricos.

Definamos $q(x, y)$, para todo $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, por

$$q(x,y) = \frac{f(x,y) - [f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)]}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}.$$

Por hipótese, temos que $q(x, y)$ tende a zero quando (x, y) tende a (x_0, y_0). Por definição de q, temos

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + q(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}. \tag{4}$$

Agora escrevemos:

$$\begin{aligned} q(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} &= q(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \cdot \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \\ &= \frac{(x-x_0)\cdot q(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \cdot (x-x_0) + \frac{(y-y_0)\cdot q(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \cdot (y-y_0). \end{aligned}$$

Definindo

$$\epsilon_1(x,y) = \frac{(x-x_0)\cdot q(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \quad \text{e} \quad \epsilon_2(x,y) = \frac{(y-y_0)\cdot q(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}},$$

temos que ϵ_1 e ϵ_2 são produtos de funções limitadas por funções que tendem a zero quando (x, y) tende a (x_0, y_0). Logo (1) é satisfeita. Para ver que a equação (2) também é satisfeita basta substituir

$$q(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \epsilon_1(x,y)(x-x_0) + \epsilon_2(x,y)(y-y_0)$$

na equação (4). Logo, f é diferenciável em (x_0, y_0) no sentido do Stewart.