MAT0221 - TURMA 46 - CÁLCULO 4

IME-USP, SEGUNDO SEMESTRE DE 2012
TERCEIRA LISTA

(1) Dada uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostre que

(a) a solução de $\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ é $y(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(x-t) f(t)dt$,

(b) a solução de $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ é $y(x) = \int_0^x e^{t-x} \operatorname{sen}(x-t) f(t)\, dt$.

(2) Dadas a, b e c constantes positivas, mostre que toda solução da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$ satisfaz $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

(3) Verifique que ϕ_1 é solução da equação dada e encontre ϕ_2 tal que $\{\phi_1, \phi_2\}$ seja uma base do espaço de soluções da equação.

(a) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \quad \phi_1(x) = x$
(b) $x^2y'' + 3xy' + y = 0, \quad \phi_1(x) = 1/x$
(c) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0, \quad \phi_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x$
(d) $y'' + xy' + y = 0, \quad \phi_1(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

(4) Encontre soluções ϕ_1 e ϕ_2 da equação dada satisfazendo as condições iniciais $\phi_1(0) = 1$, $\phi_1'(0) = 0$, $\phi_2(0) = 0$ e $\phi_2'(0) = 1$.

(a) $y'' - 2y' + 2y = 0$ (b) $y'' - 2y' + 6y = 0$ (c) $y'' + 2y' - 8y = 0$
(d) $y'' + 2y' + 2y = 0$ (e) $9y'' - 6y' + y = 0$ (f) $y'' + 6y' + 13y = 0$
(g) $y'' + 2y' - 3y = 0$ (h) $4y'' + 4y' + y = 0$ (i) $6y'' - y' - y = 0$
(j) $2y'' - 3y' + y = 0$ (k) $y'' - 2y' + y = 0$ (l) $y'' + 5y = 0$
(m) $y'' - 2y' - 2y = 0$ (n) $y'' + 2y' + y = 0$ (o) $y'' + y' - 2y = 0$
(p) $y'' + 9y = 0$ (q) $y'' - 2y' + 6y = 0$ (s) $y'' + 8y' - 9y = 0$

(5) Dadas α e β constantes reais, mostre que uma função y, definida para $x > 0$, é solução da equação $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ se, e somente se, a função z definida por $z(t) = y(e^t)$ é solução de $z'' + (\alpha - 1)z' + \beta z = 0$.
Sugestão: use a regra da cadeia para derivar duas vezes $y(x) = z(\ln x)$.

(6) Use o método do problema anterior para encontrar todas as soluções de

(a) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$, (b) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$,
(c) $2x^2y'' + 8xy' + 5y = 0$, (d) $x^2y'' + xy' + y = 0$,

definidas em $(0, +\infty)$.

(7) Encontre as soluções das equações do problema anterior definidas em $(-\infty, 0)$. Quais delas estão definidas em $\mathbb{R}$?

(8) Encontre a solução geral de

$$\text{(a) } y'' + y = \tan x, \quad \text{(b) } (1-x)y'' + xy' - y = e^x(x-1).$$

(9) Resolva $\begin{cases} (1-x)y'' + xy' - y = e^x(x-1)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$, dando o domínio maximal da solução.

(10) Dê a forma da solução particular prescrita pelo método dos coeficientes a determinar para a equação dada (não é preciso calcular o valor das constantes).

$$\text{(a) } y'' + y = x(1+\cos x) \quad \text{(b) } y'' - 2y' + y = x^2(e^x + e^{-x} + \cos x)$$
$$\text{(c) } y'' + y' = x(1+\cos x) \quad \text{(d) } y'' + 2y' + y = x^2(e^x + e^{-x} + \cos x)$$

(11) Encontre os valores de λ para os quais existe uma função não-nula u satisfazendo as condições dadas. Encontre também, em cada item, as funções que correspondem a cada valor de λ encontrado.

$$\text{(a) } \begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \qquad \text{(b) } \begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{(c) } \begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u'(0) = u(1) = 0 \end{cases} \qquad \text{(d) } \begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{(e) } \begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \\ u(0) = u(1) \\ u'(0) = u'(1) \end{cases}$$