MAT0221 - Turma 46 - 2° semestre de 2012 - 2ª lista

(1) (a) Ache a solução geral da equação diferencial $xy' + 2y = x$ e esboce o gráfico de algumas soluções.

(b) Para cada $x_0 \neq 0$ e para cada $y_0 \in \mathbb{R}$, resolva o PVI $\begin{cases} xy' + 2y = x \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, explicitando o domínio maximal da solução.

(c) Para que valores de (x_0, y_0) a solucao do PVI tem domínio igual a $\mathbb{R}$?

(2) Sejam a uma constante positiva, λ uma constante não-negativa e b uma constante real qualquer. Mostre que toda solução da equação diferencial $y' + ay = be^{-\lambda x}$ possui limite quando x tende a infinito; isto é, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} y(x) = L$. Mostre que, se λ for maior que zero, então $L = 0$. Sugestão: trate separadamente os casos $\lambda \neq a$ e $\lambda = a$.

(3) "Resolva"o PVI $\begin{cases} y' + p(x)y = 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ em que $p(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$
Note que um dos coeficientes da equação é descontínuo e que por isso o conceito de "solução" da equação precisa ser modificado. Convencionamos aqui que uma solução desta equação é uma função com domínio $[0, +\infty)$ que é contínua em $x = 1$ e cujas restrições aos intervalos $[0, 1)$ e $(1, +\infty)$ são funções de classe C^1 que satisfazem a equação diferencial.

(4) Sendo ϵ e σ constantes positivas e f uma função contínua definida em um intervalo I, obtenha a solução geral das equações diferenciais

(a) $y' = \epsilon y - \sigma y^2$, (b) $y' = \epsilon y - \sigma y^3$, (c) $y' = \epsilon y - f(x)y^3$.

Sugestão: Faça a mudança de variável dependente $v = y^{-1}$ no item (a) e $v = y^{-2}$ nos itens (b) e (c). O objetivo desta questão é apenas obter fórmulas tão explícitas quanto possíveis de todas as soluções das equações, sem se preocupar com os domínios das soluções. No item (c), aparece no segundo membro uma função f não especificada. Por isso, sua resposta necessariamente vai envolver uma integral (indefinida ou definida com limite de integração superior variável).

(5) (a) Para cada $y_0 \in \mathbb{R}$, resolva, explicitando o domínio maximal da solução, o PVI $\begin{cases} y' = xy, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$

(b) Para cada $y_0 \in \mathbb{R}$, resolva, explicitando o domínio maximal da solução, o PVI $\begin{cases} y' = xy^2, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$
Esboce os gráficos das soluções nos casos em que $y_0 = 1, 0,$ ou -1.

(6) Encontre todas as soluções da equação diferencial $y' = |y|$ e esboce o gráfico de algumas delas.

(7) (a) Ache todas as soluções positivas e todas as soluções negativas da equação diferencial $y' = \sqrt{|y|}$.

(b) Para cada $y_1 > 0$, encontre a (única) solução *positiva* do PVI $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}, \\ y(1) = y_1. \end{cases}$

(c) Para que valores de y_1 a solução obtida no item (b) pode ser estendida a função de classe C^1 definida em um intervalo aberto contendo 0, satisfazendo $y(0) = 0$, e que também é solução da equação diferencial?

(d) Mostre que o PVI $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ tem infinitas soluções.

(8) Mostre que a solução do PVI $\begin{cases} y' = (y^6 - 1)^2, \\ y(0) = 0, \end{cases}$ satisfaz a desigualdade $|y(x)| < 1$ para todo x em seu domínio.

(9) (a) Encontre m e n tais que $\mu(x, y) = x^m y^n$ seja um fator integrante para a equação diferencial

$$(y^2 + xy) + x^2 y' = 0.$$

(b) Resolva o PVI $\begin{cases} (y^2 + xy) + x^2 y' = 0, \\ y(1) = 1, \end{cases}$ explicitando o domínio maximal da solução.

(10) Determine todas as funções f que tornam exata a equação diferencial

$$y^2 \cos x + y f(x) y' = 0.$$

(11) (a) Encontre uma função f tal que $\mu(x, y) = f(x^2 + y^2)$ seja um fator integrante para a equação diferencial

$$x - xy + (y + x^2) y' = 0.$$

(b) Resolva o PVI $\begin{cases} (x - xy) + (y + x^2) y' = 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ explicitando o domínio maximal da solução.

(c) Resolva o PVI $\begin{cases} (x - xy) + (y + x^2) y' = 0, \\ y(0) = 2, \end{cases}$ explicitando o domínio maximal da solução.

(12) (a) Ache a solução geral da equação diferencial

$$y' = \frac{x + y}{x - 2y}.$$

Sugestão: faça a mudança de variável dependente $v = y/x$.

(b) Ache a solução geral da equação diferencial

$$y' = \frac{x + y + 1}{x - 2y - 1}.$$

Sugestão: para k e h constantes, faça a mudança de variável dependente $z = y + k$, seguida da mudança de variável independente $s = x + h$; depois escolha k e h tais que a equação resultante se reduza à equação do item (a).