MAT0221 - TURMA 46 - CÁLCULO 4

IME-USP, SEGUNDO SEMESTRE DE 2012
PRIMEIRA LISTA

(1) Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}\mathrm{sen}(k\pi/2)}{k}$ converge? Calcule sua soma caso ela convirja.

(2) Sejam a_n reais positivos, $n = 1, 2, \cdots$.

(a) Mostre que $\displaystyle\lim_n \frac{a_n}{1+a_n} = 0$ se e somente se $\displaystyle\lim_n a_n = 0$.

(b) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e somente se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge.

(3) Para que valores de $p > 0$ as seguintes séries convergem?

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n^p}\right), \qquad \text{(b)} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)[\ln(\ln n)]^p}.$$

(4) Sendo $\displaystyle\gamma = \lim_n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$, mostre que $\displaystyle\frac{1}{2} < \gamma < 1$.

(5) Mostre que $\displaystyle 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \cdots = \ln 3$

(6) Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as séries seguintes convergem absolutamente, convergem condicionalmente ou divergem?

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} x^n, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{9/10}} x^n, \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n.$$

(7) Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as séries seguintes convergem absolutamente, convergem condicionalmente ou divergem?

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{n^2}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{n!}.$$