ALGUMAS APLICAÇÕES DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO

SEVERINO TOSCANO DO REGO MELO
USP – MAT 0146 – 2016

O objetivo destas notas é, em primeiro lugar, apresentar de maneira arrumada os resultados que vimos na aula de 25 de abril. Aproveito a ocasião para também explicar, com uma abordagem diferente do livro-texto, o que o sinal da segunda derivada diz sobre o gráfico de uma função. Esse assunto foi tratado na aula de 27 de abril.

Começo recordando o enunciado do TVM:

Teorema do Valor Médio: *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Existe um ponto $c \in (a, b)$ (isto é, $a < c < b$) tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Uma consequência do TVM é:

Proposição 1: *Sejam f e g funções definidas em $[a, b]$ satisfazendo as hipóteses do TVM, isto é, f e g são contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e são deriváveis no intervalo aberto (a, b). Se $f'(x) < g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$ e se $f(a) = g(a)$, então $f(x) < g(x)$ para todo $x \in (a, b]$.*

Demonstração: Considere a função $h(x) = g(x) - f(x)$. É claro que h é contínua em $[a, b]$ e é derivável em (a, b). Além disso, segue da hipótese de que $f'(x) < g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$ que $h'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Pelo TVM, segue que, para cada $x \in (a, b]$, existe um $\xi \in (a, x)$ (o ponto ξ depende de x e, em geral, não se pode determinar explicitamente) tal que

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'(\xi)$$

Como $x \leq b$ e $\xi \in (a, x)$, temos que $\xi \in (a, b)$. Logo $h'(\xi) > 0$ e, portanto $h(x) - h(a) > 0$ (pois $x - a > 0$). Mas $h(a) = g(a) - f(a)$, igual a zero, por hipótese. Logo $g(x) - f(x) > 0$, como queríamos demonstrar. $\square$

Observação: Em sala, nós não aplicamos diretamente o TVM, mas sim invocamos um resultado da aula anterior que garante que h é crescente em $[a, b]$, pois tem derivada positiva em (a, b); daí concluímos que $h(x) > h(a) = 0$ para todo $x \in (a, b]$.

$\cdots \diamond \cdots$

As seguintes afirmações se demonstram com argumentos muitos parecidos aos usados na demonstração da Proposição 1. Fica para o leitor verificar em detalhe como se podem adaptar argumentos argumentos ou, pelo menos, convencer-se intuitivamente de que as afirmações são verdadeiras, usando gráficos. O leitor fica convidado a bolar outras afirmações verdadeiras parecidas com essas:

(1) Se f e g são contínuas em $[a,b]$ e deriváveis em (a,b), se $f'(x) < g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$ e se $f(b) = g(b)$, então $f(x) > g(x)$ para todo $x \in [a,b)$.

(2) Se f e g são contínuas em $[a,b]$, se $f'(x) \leq g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$ e se $f(a) = g(a)$, então $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$

(3) Se f e g são contínuas em $[a,b]$, se $f'(x) \leq g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$ e se $f(a) < g(a)$, então $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [a,b]$

(4) Se f e g são contínuas em $[a,b]$, se $f(a) = g(a)$, se $f'(x) \leq g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$ e se, para algum pequeno $\delta > 0$, $f'(x) < g'(x)$ para todo $x \in (0,\delta)$, então $f(x) < g(x)$ para todo $x \in (a,b]$

$\cdots \diamond \cdots$

Exemplo: Vamos usar a Proposição 1 para provar que, para todo $x > 0$, $\operatorname{sen} x < x$ e $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

Sejam $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = x$. Para todo $x \in (0, 2\pi)$, temos que $f'(x) = \cos x < 1 = g'(x)$ (pois o cosseno só vale 1 nos múltiplos inteiros de 2π. Além disso, $f(0) = g(0) = 0$. Segue, portanto, da Proposição que $\operatorname{sen} x < x$ se $0 < x \leq 2\pi$. Se $x > 2\pi$, então é óbvio que $\operatorname{sen} x < x$, pois $\operatorname{sen} x \leq 1$ e $x > 2\pi > 1$. Isto prova que $\operatorname{sen} x < x$, para todo $x > 0$.

Sejam agora $F(x) = \cos x$ e $G(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. Então $F'(x) = -\operatorname{sen} x$ e $G'(x) = -x$. Como $\operatorname{sen} x < x$ para todo $x > 0$, segue que $-\operatorname{sen} x > -x$ para todo $x > 0$, ou seja, $F'(x) > G'(x)$ para todo $x > 0$. Segue então da Proposição 1, com G no lugar de f e F no lugar de g que $G(x) < F(x)$ para todo $x > 0$, ou seja, $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ para todo $x > 0$, como queríamos.

Observação: Note que, neste caso (para estas funções F e G), o b da Proposição 1 pode ser qualquer número positivo, tão grande quanto se queira. É por isso que a conclusão da Proposição vale para todo $x > 0$.

Concavidade do gráfico de uma função

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável definida no intervalo aberto I. Dizemos que o gráfico de f é *côncavo para cima* se as retas tangentes ao gráfico de f ficam abaixo dele, exceto, naturalmente, no próprio ponto de tangência. Levando em conta que, para cada $a \in I$, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ tem equação $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, podemos re-expressar analiticamente essa condição gráfica dizendo que f tem gráfico côncavo para cima se,

$$f(a) + f'(a)(x-a) < f(x), \text{para todo } a \in I \text{ e para todo } x \in I, x \neq a. \tag{1}$$

Vamos provar que esta condição é satisfeita se f' for crescente em I (isto é, se $f'(a) < f'(b)$ sempre que $a < b$, a e b pertencentes a I).

Para cada $a \in I$, definamos a função $t(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Como a função t depende do a escolhido, seria mais preciso denotá-la por t_a. Evitamos fazer isso para não carregar demais a notação. Temos que $t(a) = f(a)$ (basta substituir $x = a$ na definição de t para ver isto). Além disso, $t'(x) = f'(a)$ para todo x (para ver isto, basta derivar em relação a x a expressão que define t). Daí, se $x \in I$ e $x > a$, então $t'(x) < f'(x)$ (pois f' é crescente, por hipótese). Segue então da Proposição 1 que $t(x) < f(x)$ para todo $x > a$, ou seja, que $f(a) + f'(a)(x - a) < f(x)$ se $x > a$. Se $x < a$, $t'(x) > f'(x)$, de novo porque f' é crescente. Segue então da

Afirmação (1), que ficou para o leitor provar, que $t(x) < f(x)$ se $x < a$. Isso conclui a demonstração de que o gráfico de f é côncavo para cima no intervalo aberto I se f' for crescente em I.

Vamos provar agora que vale também a recíproca, isto é, que se o gráfico de f for côncavo para cima, então f' é crescente.

Para isso, sejam a e b pontos arbitrários de I, $a < b$. Queremos mostrar que $f'(a) < f'(b)$. Aplicando (1) com b no lugar de x e usando que $(b - a) > 0$, vem:

(2) $$f'(a) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Aplicando agora (1) com b no lugar de a e a no lugar de x, vem $f(b) + f'(b)(a - b) < f(a)$. Usando que $(a - b) < 0$, vem:

(3) $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} < f'(b).$$

Combinando as desigualdades (2) e (3), vem que $f'(a) < f'b)$, como queríamos.

Isto prova a seguinte proposição.

Proposição 2: *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável, definida no intervalo aberto I. Então f tem gráfico côncavo para cima (isto é, vale (1)) se, e somente se, f' é crescente.*

Decorre da Proposição 2 que, se existir a derivada de segunda ordem f'' em I e se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f tem gráfico côncavo para cima (pois f'' positiva implica f' crescente). Mas não é necessário que f'' seja positiva para que f tenha gráfico côncavo para cima. Por exemplo, $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$, tem gráfico côncavo para cima, apesar de $f''(0)$ ser igual a zero.

Assim como definimos o que significa o gráfico de uma função ser côncavo para cima, podemos definir de maneira completamente análoga o que significa o gráfico de uma função (definida em um intervalo aberto) ser côncavo para baixo. Também analogamente, demonstra-se que o gráfico de uma função f é côncavo para baixo se, e somente se, f' for decrescente e que f'' ser negativa é uma condição suficiente para que o gráfico de f ser côncavo para baixo.

Pontos de Inflexão

Pode-se falar em intervalos, contidos no domínio de uma função, nos quais a função tem gráfico côncavo para cima ou para baixo. Assim, por exemplo, a função $f(x) = x^3$ tem gráfico côncavo para cima no intervalo $(0, +\infty)$ e côncavo para baixo em $(-\infty, 0)$. Define-se então *ponto de inflexão* de $f : I \to \mathbb{R}$ como sendo um ponto $c \in I$ no qual f é contínua e tal que o gráfico de f tem concavidades diferentes (uma para baixo e outra para cima) para $x < c$ ou para $x > c$. O ponto $x = 0$ é ponto de inflexão de $f(x) = x^3$.

Se c é um ponto de inflexão de $f : I \to \mathbb{R}$ e se $f''(c)$ existe, então necessariamente $f''(c) =$. Isto porque, de um lado de c, f' é crescente, do outro, é decrescente. Logo c é ponto de mínimo local ou de máximo local de f'. Pelo teorema de Fermat, portanto, a derivada de f', que é f'', se anula em c. Mas esta não é uma condição suficiente. A segunda derivada de uma função pode se anular em um ponto que não é ponto de inflexão; por exemplo, a segunda derivada de $f(x) = x^4$ se anula em $x = 0$, mas 0 não é ponto de inflexão de f.