TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

SEVERINO TOSCANO DO REGO MELO
USP – MAT 0146 – 2016

O objetivo desta nota é mostrar que toda bijeção derivável $f : I \to J$ entre dois intervalos abertos I e J tem inversa derivável em todo ponto b de J que seja imagem de um ponto de I no qual f' não se anule. Esta afirmação é uma consequência imediata do Teorema 1 e do Teorema 2 enunciados abaixo. De fato, para verificar a hipótese da continuidade de f^{-1} em b, o que é necessário fazer para que se possa aplicar o Teorema 2 à f dada, basta aplicar o Teorema 1.

Uma observação preliminar de que necessitamos é a seguinte: se $f : I \to J$ é injetora e contínua (ainda supondo que I e J são intervalos), então, ou f é crescente ou é decrescente. De fato, se existissem a, b e c em I tais que $a < b < c$ e $f(c) < f(a) < f(b)$, seguiria do Teorema do Valor Intermediário que existiria d entre b e c tal que $f(a) = f(d)$ e, portanto, f não seria injetora. Por um argumento análogo, vê-se que não podem existir a, b e c em I tais que $a < b < c$ e que $f(a) < f(c) < f(b)$; nem que $f(b) < f(a) < f(c)$ ou $f(b) < f(c) < f(a)$. Logo, ou f é crescente ou é decrescente.

Teorema 1: Sejam I e J intervalos abertos e seja $f : I \to J$ uma função contínua e bijetora. Então $f^{-1} : J \to I$ é contínua.

Teorema 2: Sejam I e J intervalos abertos e seja $f : I \to J$ uma função bijetora. Se f for derivável em $a \in I$, se $f'(a) \neq 0$ e se f^{-1} for contínua em $b = f(a)$, então f^{-1} é derivável em b.

Demonstração do Teorema 1: Sem perda de generalidade, podemos supor que f é crescente (pois o argumento para o caso em que f é decrescente é análogo). Dados $b \in J$ e $\epsilon > 0$, seja $a = f^{-1}(b)$ e escolha um número positivo $\tilde{\epsilon}$ menor do que ϵ e pequeno o suficiente de modo que $a + \tilde{\epsilon}$ e $a - \tilde{\epsilon}$ pertençam a I. Tome um $\delta > 0$ que seja, simultaneamente, menor do que $f(a + \tilde{\epsilon}) - b$ e do que $b - f(a - \tilde{\epsilon})$. Então, $|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \epsilon$ sempre que $|y - b| < \delta$. Isto prova que f^{-1} é contínua em b, como queríamos.

Demonstração do Teorema 2: Usando que $f'(a) \neq 0$, temos que

$$\lim_{x\to a} \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Usando que f^{-1} é contínua em b, temos que

$$\frac{1}{f'(a)} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y))-b} = \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = (f^{-1})'(b).$$

Isto prova que $(f^{-1})'(b)$ existe e é igual a $\frac{1}{f'(a)}$.