■ Como $\text{tg}^{-1}x \geqslant 0$ para $x \geqslant 0$, a integral no Exemplo 5 pode ser interpretada como a área da região mostrada na Figura 2.

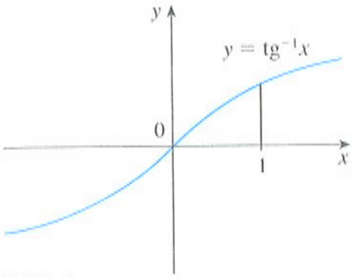


FIGURA 2

Para calcular essa integral, usamos a substituição $t = 1 + x^2$ (já que u tem outro significado nesse exemplo). Então $dt = 2x\,dx$ e, assim, $x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$. Quando $x = 0$, $t = 1$; quando $x = 1$, $t = 2$; portanto

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|\Big]_1^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Assim,
$$\int_0^1 \text{tg}^{-1}x\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$ □

EXEMPLO 6 Demonstre a fórmula de redução

$$\boxed{7} \qquad \int \text{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\,\text{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}x\,dx$$

em que $n \geqslant 2$ é um inteiro.

■ A Equação 7 é chamada *fórmula de redução* porque o expoente n foi *reduzido* para $n-1$ e $n-2$.

SOLUÇÃO Seja

$$u = \text{sen}^{n-1}x \qquad dv = \text{sen}\,x\,dx$$

Então,
$$du = (n-1)\,\text{sen}^{n-2}x\cos x\,dx \qquad v = -\cos x$$

de modo que a integração por partes resulta em

$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\text{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

Como $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$, temos

$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\text{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \text{sen}^n x\,dx$$

Como no Exemplo 4, nessa equação isolamos a integral desejada, levando o último termo do lado direito para o lado esquerdo. Então, temos

$$n\int \text{sen}^n x\,dx = -\cos x\,\text{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\,dx$$

ou
$$\int \text{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\,\text{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}x\,dx$$ □

A fórmula de redução (7) é útil porque usando-a repetidas vezes podemos eventualmente expressar $\int \text{sen}^n x\,dx$ em termos de $\int \text{sen}\,x\,dx$ (se n for ímpar) ou $\int (\text{sen}\,x)^0\,dx = \int dx$ (se n for par).

7.1 EXERCÍCIOS

1–2 Calcule a integral usando a integração por partes com as escolhas de u e dv indicadas.

1. $\int x^2 \ln x\,dx$; $\quad u = \ln x, \quad dv = x^2\,dx$

2. $\int \theta\cos\theta\,d\theta$; $\quad u = \theta\,, \quad dv = \cos\theta\,d\theta$

3–32 Calcule a integral.

3. $\int x\cos 5x\,dx$

4. $\int xe^{-x}\,dx$

5. $\int re^{r/2}\,dr$

6. $\int t\,\text{sen}\,2t\,dt$

7. $\int x^2\cos 3x\,dx$

8. $\int x^2\,\text{sen}\,ax\,dx$

9. $\int \ln(2x+1)\,dx$

10. $\int \text{sen}^{-1}x\,dx$

11. $\int \text{arctg}\,4t\,dt$

12. $\int p^5\ln p\,dp$

13. $\int t\sec^2 2t\,dt$

14. $\int s\,2^s\,ds$

15. $\int (\ln x)^2\,dx$

16. $\int t\,\text{senh}\,mt\,dt$

17. $\int e^{2\theta}\,\text{sen}\,3\theta\,d\theta$

18. $\int e^{-\theta}\cos 2\theta\,d\theta$

19. $\int_0^\pi t\,\text{sen}\,3t\,dt$

20. $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\,dx$

21. $\int_0^1 t \cosh t \, dt$

22. $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}} \, dy$

23. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

24. $\int_0^{\pi} x^3 \cos x \, dx$

25. $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}} \, dy$

26. $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(1/x) dx$

27. $\int_0^{1/2} \cos^{-1} x \, dx$

28. $\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3} \, dx$

29. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x) \, dx$

30. $\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4 + r^2}} \, dr$

31. $\int_1^2 x^4 (\ln x)^2 \, dx$

32. $\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t - s) \, ds$

33–38 Primeiro faça uma substituição e então use integração por partes para calcular a integral.

33. $\int \cos \sqrt{x} \, dx$

34. $\int t^3 e^{-t^2} \, dt$

35. $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2) \, d\theta$

36. $\int_0^{\pi} e^{\cos t} \operatorname{sen} 2t \, dt$

37. $\int x \ln(1 + x) \, dx$

38. $\int \operatorname{sen}(\ln x) \, dx$

39–42 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável usando o gráfico da função e de sua primitiva ($C = 0$).

39. $\int (2x + 3)e^x \, dx$

40. $\int x^{3/2} \ln x \, dx$

41. $\int x^3 \sqrt{1 + x^2} \, dx$

42. $\int x^2 \operatorname{sen} 2x \, dx$

43. (a) Use a fórmula de redução do Exemplo 6 para mostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) Use a parte (a) e a fórmula de redução para calcular $\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$.

44. (a) Demonstre a fórmula de redução

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

(b) Use a parte (a) para calcular $\int \cos^2 x \, dx$.

(c) Use as partes (a) e (b) para calcular $\int \cos^4 x \, dx$.

45. (a) Use a fórmula de redução do Exemplo 6 para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

em que $n \geqslant 2$ é um inteiro.

(b) Use a parte (a) para calcular $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \, dx$ e $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x \, dx$.

(c) Use a parte (a) para mostrar que, para as potências ímpares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x \, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n + 1)}$$

46. Demonstre que, para as potências pares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x \, dx = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} \frac{\pi}{2}$$

47–50 Use integração por partes para demonstrar a fórmula de redução.

47. $\int (\ln x)^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx$

48. $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$

49. $\operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n - 1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx \qquad (n \neq 1)$

50. $\int \sec^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n - 1} + \frac{n - 2}{n - 1} \int \sec^{n-2} x \, dx \qquad (n \neq 1)$

51. Use o Exercício 47 para encontrar $\int (\ln x)^3 \, dx$.

52. Use o Exercício 48 para encontrar $\int x^4 e^x dx$.

53–54 Encontre a área da região delimitada pelas curvas dadas.

53. $y = xe^{-0,4x}, \quad y = 0, \quad x = 5$

54. $y = 5 \ln x, \quad y = x \ln x$

55–56 Use um gráfico para encontrar as coordenadas aproximadas x dos pontos de intersecção das curvas dadas. A seguir, ache (aproximadamente) a área da região delimitada pelas curvas.

55. $y = x \operatorname{sen} x, \quad y = (x - 2)^2$

56. $y = \operatorname{arctg} 3x, \quad y = \frac{1}{2} x$

57–60 Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas ao redor dos eixos especificados.

57. $y = \cos(\pi x/2), \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1;$ em torno do eixo y

58. $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1;$ em torno do eixo y

59. $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 0;$ em torno de $x = 1$

60. $y = e^x, \quad x = 0, \quad y = \pi;$ em torno do eixo x

61. Encontre o valor médio de $f(x) = x^2 \ln x$ no intervalo $[1, 3]$.

62. Um foguete acelera pela queima do combustível a bordo; assim, sua massa diminui com o tempo. Suponha que a massa inicial do foguete no lançamento (incluindo o combustível) seja m, que o combustível seja consumido a uma taxa r, e que os gases de exaustão sejam ejetados a uma velocidade constante v_e (relativa ao foguete). Um modelo para a velocidade do foguete no instante t é dado pela seguinte equação:

$$v(t) = -gt - v_e \ln \frac{m - rt}{m}$$

em que g é a aceleração da gravidade e t não é muito grande. Se $g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$, $m = 30\,000$ kg, $r = 160$ kg/s e $v_e = 3\,000$ m/s, ache a altitude do foguete 1 minuto após o lançamento.

63. Uma partícula que se move ao longo de uma reta tem velocidade igual a $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo após t segundos. Qual a distância que essa partícula percorrerá durante os primeiros t segundos?

64. Se $f(0) = g(0) = 0$ e f'' e g'' são contínuas, mostre que

$$\int_0^a f(x)g''(x)\,dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)\,dx.$$

65. Suponha que $f(1) = 2, f(4) = 7, f'(1) = 5, f'(4) = 3$ e que f'' seja contínua. Determine o valor de $\int_1^4 x f''(x)\,dx$.

66. (a) Use integração por partes para mostrar que

$$\int f(x)\,dx = x f(x) - \int x f'(x)\,dx$$

(b) Se f e g são funções inversas e f' é contínua, demonstre que

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$$

[*Sugestão*: Use a parte (a) e faça a substituição $y = f(x)$.]

(c) No caso em que f e g são funções positivas e $b > a > 0$, desenhe um diagrama para dar uma interpretação geométrica à parte (b).

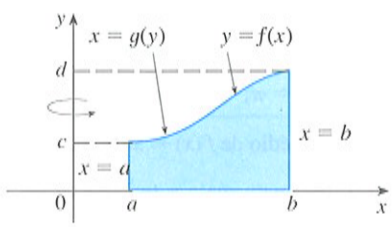
(d) Use a parte (b) para calcular $\int_1^e \ln x\,dx$.

67. Chegamos à Fórmula 6.3.2, $V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$, utilizando cascas cilíndricas, mas agora podemos usar integração por partes para demonstrá-la usando o método das fatias da Seção 6.2, ao menos para o caso em que f é injetora e, portanto, tem uma função inversa g. Use a figura para mostrar que

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi[g(y)]^2\,dy$$

Faça a substituição $y = f(x)$ e então use integração por partes na integral resultante para demonstrar que

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$



68. Seja $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$.

(a) Mostre que $I_{2n+2} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$.

(b) Use o Exercício 46 para mostrar que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

(c) Utilize as partes (a) e (b) para mostrar que

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1$$

e deduza que $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$.

(d) Use a parte (c) e os Exercícios 45 e 46 para mostrar que

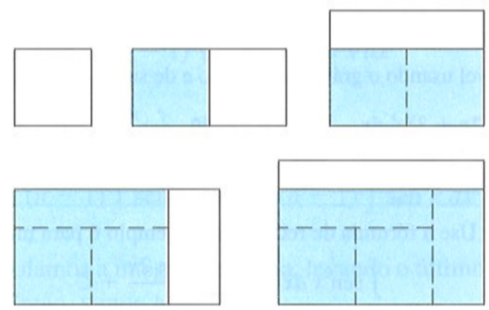
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Essa fórmula geralmente é escrita como um produto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots$$

que é chamado *produto de Wallis*.

(e) Construímos retângulos como a seguir. Comece com um quadrado de área 1 e coloque retângulos de área 1 alternadamente ao lado ou no topo do retângulo anterior (veja a figura). Encontre o limite da relação largura/altura desses retângulos.



7.2 INTEGRAIS TRIGONOMÉTRICAS

Nesta seção usaremos as identidades trigonométricas para integrar certas combinações de funções trigonométricas. Começaremos com as potências de seno e cosseno.

EXEMPLO 1 Calcule $\int \cos^3 x\,dx$.

SOLUÇÃO A simples substituição $u = \cos x$ não ajuda, porque assim $du = -\operatorname{sen} x\,dx$. Para integrarmos potências de cosseno, necessitaríamos de um fator extra $\operatorname{sen} x$. Analogamente, uma potência de seno precisaria de um fator extra $\cos x$. Dessa forma, podemos separar um fator cosseno e converter o fator $\cos^2 x$ restante em uma expressão envolvendo o seno usando a identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \tfrac{1}{2}(\sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) + C \qquad \square$$

As integrais como as do Exemplo 8 podem parecer muito especiais, mas elas ocorrem frequentemente nas aplicações de integração, como veremos no Capítulo 8. As integrais da forma $\int \operatorname{cotg}^m x \operatorname{cossec}^n x\, dx$ podem ser encontradas por métodos similares por causa da identidade $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$.

Finalmente, podemos usar outras identidades trigonométricas:

■ Essas identidades envolvendo produtos são discutidas no Apêndice D.

2 Para calcular as integrais (a) $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx$, (b) $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx$ ou (c) $\int \cos mx \cos nx\, dx$, use a identidade correspondente:

$$\text{(a) } \operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)]$$

$$\text{(b) } \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\text{(c) } \cos A \cos B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

EXEMPLO 9 Calcule $\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\, dx$.

SOLUÇÃO Essa integral pode ser calculada utilizando-se integração por partes, mas é mais fácil usar a identidade na Equação 2(a), como a seguir:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\, dx &= \int \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen} 9x]\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int (-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 9x) + C \qquad \square\end{aligned}$$

7.2 EXERCÍCIOS

1–49 Calcule a integral.

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx$

2. $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^3 x\, dx$

3. $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x\, dx$

4. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\, dx$

5. $\int \operatorname{sen}^2(\pi x) \cos^5(\pi x)\, dx$

6. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$

7. $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$

8. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2\theta)\, d\theta$

9. $\int \cos^4 t\, dt$

10. $\int \operatorname{sen}^6 \pi x\, dx$

11. $\int (1 + \cos\theta)^2\, d\theta$

12. $\int x \cos^2 x\, dx$

13. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$

14. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t\, dt$

15. $\int \dfrac{\cos^5\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}\alpha}}\, d\alpha$

16. $\int \cos\theta \cos^5(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta$

17. $\int \cos^2 x \operatorname{tg}^3 x\, dx$

18. $\int \operatorname{cotg}^5\theta \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta$

19. $\int \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

20. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} 2x\, dx$

21. $\int \sec^2 x \operatorname{tg} x\, dx$

22. $\int_0^{\pi/2} \sec^4(t/2)\, dt$

23. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$

24. $\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)\, dx$

25. $\int \sec^6 t\, dt$

26. $\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta \operatorname{tg}^4\theta\, d\theta$

27. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x\, dx$

28. $\int \operatorname{tg}^2(2x) \sec^5(2x)\, dx$

29. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec x\, dx$

30. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^5 x \sec^6 x\, dx$

31. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$

32. $\int \operatorname{tg}^6(ay)\, dy$

33. $\int \dfrac{\operatorname{tg}^3\theta}{\cos^4\theta}\, d\theta$

34. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec x\, dx$

35. $\int x \sec x \operatorname{tg} x\, dx$

36. $\int \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^3\phi}\, d\phi$

37. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^2 x\, dx$

38. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^3 x\, dx$

39. $\int \operatorname{cotg}^3\alpha \operatorname{cossec}^3\alpha\, d\alpha$

40. $\int \operatorname{cossec}^4 x \operatorname{cotg}^6 x\, dx$

41. $\int \operatorname{cossec} x\, dx$

42. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{cossec}^3 x\, dx$

43. $\int \operatorname{sen} 8x \cos 5x\, dx$

44. $\int \operatorname{sen} 3x \cos x\, dx$

45. $\int \cos 7\theta \cos 5\theta\, d\theta$

46. $\int \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x}\, dx$

47. $\int \frac{1 - \text{tg}^2 x}{\sec^2 x}\, dx$

48. $\int \frac{dx}{\cos x - 1}$

49. $\int t \sec^2(t^2) \text{tg}^4(t^2)\, dt$

50. Se $\int_0^{\pi/4} \text{tg}^6 x \sec x\, dx = I$, expresse o valor de $\int_0^{\pi/4} \text{tg}^8 x \sec x\, dx$ em termos de I.

51–54 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável colocando em um gráfico o integrando e sua primitiva (tome $C = 0$).

51. $\int x \,\text{sen}^2(x^2)\, dx$

52. $\int \text{sen}^3 x \cos^4 x\, dx$

53. $\int \text{sen}\, 3x \,\text{sen}\, 6x\, dx$

54. $\int \sec^4 \frac{x}{2}\, dx$

55. Encontre o valor médio da função $f(x) = \text{sen}^2 x \cos^3 x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

56. Calcule $\int \text{sen}\, x \cos x\, dx$ por quatro métodos:
(a) a substituição $u = \cos x$,
(b) a substituição $u = \text{sen}\, x$,
(c) a identidade $\text{sen}\, 2x = 2 \,\text{sen}\, x \cos x$
(d) integração por partes
Explique os aspectos diferentes de suas respostas.

57–58 Encontre a área da região delimitada pelas curvas dadas.

57. $y = \text{sen}^2 x, \quad y = \cos^2 x, \quad -\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/4$

58. $y = \text{sen}^3 x, \quad y = \cos^3 x, \quad \pi/4 \leqslant x \leqslant 5\pi/4$

59–60 Use um gráfico do integrando para conjecturar o valor da integral. Então, utilize os métodos desta seção para demonstrar que sua conjectura está correta.

59. $\int_0^{2\pi} \cos^3 x\, dx$

60. $\int_0^2 \text{sen}\, 2\pi x \cos 5\pi x\, dx$

61–64 Encontre o volume obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno dos eixos especificados.

61. $y = \text{sen}\, x, \quad y = 0, \quad \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$; em torno de eixo x

62. $y = \text{sen}^2 x, \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$; em torno de eixo x

63. $y = \text{sen}\, x, \quad y = \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$; em torno de $y = 1$

64. $y = \sec x, \quad y = \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$; em torno de $y = -1$

65. Uma partícula se move em linha reta com função velocidade $v(t) = \text{sen}\, \omega t \cos^2 \omega t$. Encontre sua função posição $s = f(t)$ se $f(0) = 0$.

66. A eletricidade doméstica é fornecida na forma de corrente alternada que varia de 155 V a −155 V com uma frequência de 60 ciclos por segundo (Hz). A voltagem então é dada pela seguinte equação:

$$E(t) = 155 \,\text{sen}(120\pi t)$$

onde t é o tempo em segundos. Os voltímetros leem a voltagem RMS (raiz da média quadrática), que é a raiz quadrada do valor médio de $[E(t)]^2$ em um ciclo.
(a) Calcule a voltagem RMS da corrente doméstica.
(b) Muitos fornos elétricos requerem a voltagem RMS de 220 V. Encontre a amplitude A correspondente necessária para a voltagem $E(t) = A \,\text{sen}(120\pi t)$.

67–69 Demonstre a fórmula, onde m e n são inteiros positivos.

67. $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\, mx \cos nx\, dx = 0$

68. $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\, mx \,\text{sen}\, nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$

69. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$

70. Uma *série de Fourier finita* é dada pela soma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \,\text{sen}\, nx$$
$$= a_1 \,\text{sen}\, x + a_2 \,\text{sen}\, 2x + \cdots + a_N \,\text{sen}\, Nx$$

Mostre que o m-ésimo coeficiente a_m é dado pela fórmula

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\text{sen}\, mx\, dx$$

7.3 SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Para achar a área de um círculo ou uma elipse, uma integral da forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ aparece, onde $a > 0$. Se a integral fosse $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, a substituição $u = a^2 - x^2$ poderia ser eficaz, mas, como está, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ é mais difícil. Se mudarmos a variável de x para θ pela substituição $x = a \,\text{sen}\, \theta$, então a identidade $1 - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ permitirá que nos livremos da raiz, porque

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \text{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \text{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a\, |\cos\theta|$$

Observe a diferença entre a substituição $u = a^2 - x^2$ (na qual uma nova variável é uma função da velha) e a substituição $x = a \,\text{sen}\, \theta$ (a variável velha é uma função da nova).

Em geral, podemos fazer uma substituição da forma $x = g(t)$ usando a Regra da Substituição ao contrário. Para simplificar nossos cálculos, presumimos que g tenha uma fun-

$$= \tfrac{3}{16}\left[u + \frac{1}{u}\right]_1^{1/2} = \tfrac{3}{16}\left[\left(\tfrac{1}{2} + 2\right) - (1 + 1)\right] = \tfrac{3}{32} \qquad \square$$

EXEMPLO 7 Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\,dx$.

SOLUÇÃO Podemos transformar o integrando em uma função para a qual a substituição trigonométrica é apropriada completando o quadrado:

$$\begin{aligned} 3 - 2x - x^2 &= 3 - (x^2 + 2x) = 3 + 1 - (x^2 + 2x + 1) \\ &= 4 - (x + 1)^2 \end{aligned}$$

Isso sugere a substituição $u = x + 1$. Então $du = dx$ e $x = u - 1$, assim

$$\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\,dx = \int \frac{u - 1}{\sqrt{4 - u^2}}\,dy$$

■ A Figura 5 mostra o gráfico do integrando do Exemplo 7 e o de uma integral indefinida (com $C = 0$). Qual é qual?

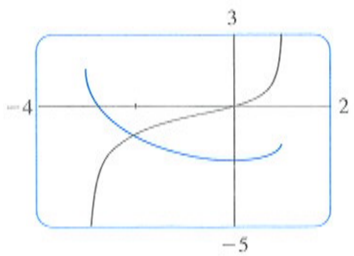


FIGURA 5

Agora substituímos $u = 2\,\text{sen}\,\theta$, obtendo $du = 2\cos\theta\,d\theta$ e $\sqrt{4 - u^2} = 2\cos\theta$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\,dx &= \int \frac{2\,\text{sen}\,\theta - 1}{2\cos\theta}\,2\cos\theta\,d\theta \\ &= \int (2\,\text{sen}\,\theta - 1)\,d\theta \\ &= -2\cos\theta - \theta + C \\ &= -\sqrt{4 - u^2} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\ &= -\sqrt{3 - 2x - x^2} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C \qquad \square \end{aligned}$$

7.3 EXERCÍCIOS

1–3 Calcule a integral usando a substituição trigonométrica indicada. Esboce e coloque legendas no triângulo retângulo associado.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}\,dx;\ x = 3\sec\theta$

2. $\displaystyle\int x^3\sqrt{9 - x^2}\,dx;\ x = 3\,\text{sen}\,\theta$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{9 + x^2}}\,dx;\ x = 3\,\text{tg}\,\theta$

4–30 Calcule a integral.

4. $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16 - x^2}}\,dx$

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t^3\sqrt{t^2 - 1}}\,dt$

6. $\displaystyle\int_0^2 x^3\sqrt{x^2 + 4}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{25 - x^2}}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2 + 2}}\,dt$

11. $\displaystyle\int \sqrt{1 - 4x^2}\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 4}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{5 - u^2}}$

15. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dx}{x^5\sqrt{9x^2 - 1}}$

17. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{[(ax)^2-b^2]^{3/2}}$

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{25-t^2}}\,dt$

21. $\displaystyle\int_0^{0{,}6} \frac{x^2}{\sqrt{9-25x^2}}\,dx$

22. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$

23. $\displaystyle\int \sqrt{5+4x-x^2}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-6t+13}}$

25. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(3+4x-4x^2)^{3/2}}\,dx$

27. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^4}\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t}}\,dt$

---

31. (a) Use substituição trigonométrica para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$$

(b) Use a substituição hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$ para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

Essas fórmulas estão interligadas pela Fórmula 3.11.3.

32. Calcule

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dx$$

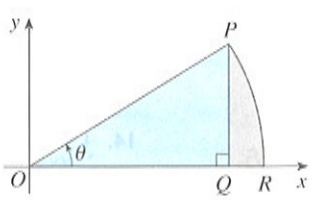
(a) por substituição trigonométrica.

(b) pela substituição hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$.

33. Encontre o valor médio de $f(x) = \sqrt{x^2-1}/x$, $1 \leqslant x \leqslant 7$.

34. Encontre a área da região delimitada pela hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$ e a reta $x = 3$.

35. Demonstre a fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ para a área de um setor circular com raio r e ângulo central θ. [*Sugestão*: Suponha $0 < \theta < \pi/2$ e coloque o centro do círculo na origem; assim ele terá a equação $x^2 + y^2 = r^2$. Então A é a soma da área do triângulo POQ e da área da região PQR na figura.]



36. Calcule a integral

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-2}}$$

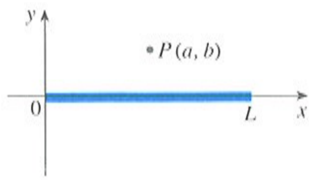
Coloque em um gráfico o integrando e a integral indefinida e verifique se sua resposta é razoável.

37. Use o gráfico para aproximar as raízes da equação $x^2\sqrt{4-x^2} = 2-x$. Então, aproxime a área limitada pela curva $y = x^2\sqrt{4-x^2}$ e a reta $y = 2-x$.

38. Uma barra carregada de comprimento L produz um campo elétrico no ponto $P(a, b)$ dado por

$$E(P) = \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0(x^2+b^2)^{3/2}}\,dx$$

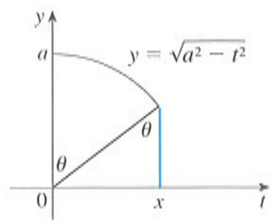
em que λ é a densidade de carga por unidade de comprimento da barra e ε_0, a permissividade do vácuo (veja a figura). Calcule a integral para determinar uma expressão para o campo elétrico $E(P)$.



39. (a) Use substituição trigonométrica para verificar que

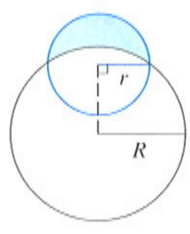
$$\int_0^x \sqrt{a^2-t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}^{-1}(x/a) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$$

(b) Use a figura para dar interpretações geométricas de ambos os termos no lado direito da equação na parte (a).



40. A parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide o disco $x^2 + y^2 \leqslant 8$ em duas partes. Encontre as áreas de ambas as partes.

41. Encontre a área da região em forma de *lua crescente* delimitada pelos arcos dos círculos de raios r e R. (Veja a figura.)



42. Um tanque reservatório de água tem o formato de um cilindro com diâmetro de 10 m. Ele está montado de forma que as secções transversais circulares são verticais. Se a profundidade da água é 7 m, qual porcentagem da capacidade total está sendo usada?

43. Um toro é gerado pela rotação do círculo $x^2 + (y-R)^2 = r^2$ ao redor do eixo x. Ache o volume delimitado pelo toro.

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}\,dx$$

possa ser calculada pelo método do Caso III, é muito mais fácil observar que se $u = x(x^2 + 3) = x^3 + 3x$, então $du = (3x^2 + 3)\,dx$, e assim

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln|x^3 + 3x| + C$$

SUBSTITUIÇÕES RACIONALIZANTES

Algumas funções não racionais podem ser transformadas em funções racionais por meio de substituições apropriadas. Em particular, quando um integrando contém uma expressão da forma $\sqrt[n]{g(x)}$, então a substituição $u = \sqrt[n]{g(x)}$ pode ser eficaz. Outros exemplos aparecem nos exercícios.

EXEMPLO 9 Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$.

SOLUÇÃO Seja $u = \sqrt{x+4}$. Então $u^2 = x + 4$, de modo que $x = u^2 - 4$ e $dx = 2u\,du$. Portanto

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = \int \frac{u}{u^2-4}\,2u\,du = 2\int \frac{u^2}{u^2-4}\,du$$

$$= 2\int \left(1 + \frac{4}{u^2-4}\right) du$$

Podemos calcular essa integral fatorando $u^2 - 4$ em $(u-2)(u+2)$ e usando as frações parciais ou a Fórmula 6 com $a = 2$:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2-4}$$

$$= 2u + 8 \cdot \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C$$

$$= 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C \qquad \square$$

7.4 EXERCÍCIOS

1–6 Escreva as formas de decomposição em frações parciais da função (como no Exemplo 7). Não determine os valores numéricos dos coeficientes.

1. (a) $\dfrac{2x}{(x+3)(3x+1)}$ (b) $\dfrac{1}{x^3 + 2x^2 + x}$

2. (a) $\dfrac{x-1}{x^3 + x^2}$ (b) $\dfrac{x-1}{x^3 + x}$

3. (a) $\dfrac{x-2}{x^2 + 3x - 4}$ (b) $\dfrac{x^2}{(x-1)(x^2+x+1)}$

4. (a) $\dfrac{x^3}{x^2 + 4x + 3}$ (b) $\dfrac{2x+1}{(x-1)^3(x^2+4)^2}$

5. (a) $\dfrac{x^4}{x^4 - 1}$ (b) $\dfrac{t^4 + t^2 + 1}{(t^2+1)(t^2+4)^2}$

6. (a) $\dfrac{x^4}{(x^3+x)(x^2-x+3)}$ (b) $\dfrac{1}{x^6-x^3}$

7–38 Calcule a integral.

7. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{y}{y+2}\,dy$

9. $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{(t+4)(t-1)}\,dt$

11. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+3x+2}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{ax}{x^2-bx}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$

15. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3+2x^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}\,dx$

17. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}\,dy$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+16}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x^3+4}{x^2+4}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{ds}{s^2(s-1)^2}$

23. $\displaystyle\int \frac{5x^2+3x-2}{x^3+2x^2}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+4}{x^4+3x^2+2}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+13}\,dx$

33. $\displaystyle\int_2^5 \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+4}\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-x^2}$

36. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^5+5x^3+5x}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2}\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+3x-2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

39–50 Faça uma substituição para expressar o integrando como uma função racional e então calcule a integral.

39. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x}$

41. $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,dx$

42. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$

44. $\displaystyle\int_{1/3}^3 \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$ [*Sugestão:* Substitua $u=\sqrt[6]{x}$.]

46. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

47. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 t}{\operatorname{tg}^2 t+3\operatorname{tg} t+2}\,dt$

50. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+1)}\,dx$

51–52 Use integração por partes, juntamente com as técnicas desta seção, para calcular a integral.

51. $\displaystyle\int \ln(x^2-x+2)\,dx$

52. $\displaystyle\int x\operatorname{tg}^{-1}x\,dx$

53. Use um gráfico de $f(x)=1/(x^2-2x-3)$ para decidir se $\int_0^2 f(x)\,dx$ é positiva ou negativa. Utilize o gráfico para dar uma estimativa aproximada do valor da integral e então use as frações parciais para encontrar o valor exato.

54. Trace a função $y=1/(x^3-2x^2)$ e sua primitiva na mesma tela.

55–56 Calcule a integral completando o quadrado e usando a Fórmula 6.

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}$

56. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{4x^2+12x-7}\,dx$

57. O matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897) observou que a substituição $t=\operatorname{tg}(x/2)$ converte qualquer função racional de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ em uma função racional ordinária de t.

(a) Se $t=\operatorname{tg}(x/2)$, $-\pi<x<\pi$, esboce um triângulo retângulo ou use as identidades trigonométricas para mostrar que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

(b) Mostre que

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$$

(c) Mostre que

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

58–61 Use a substituição do Exercício 55 para transformar o integrando em uma função racional de t e então calcule a integral.

58. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 - 5\,\text{sen}\,x}\,dx$

59. $\displaystyle\int \frac{1}{3\,\text{sen}\,x - 4\cos x}\,dx$

60. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1 + \text{sen}\,x - \cos x}\,dx$

61. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}\,2x}{2 + \cos x}\,dx$

62–63 Encontre a área da região sob a curva dada de 1 até 2.

62. $y = \dfrac{1}{x^3 + x}$

63. $y = \dfrac{x^2 + 1}{3x - x^2}$

64. Encontre o volume do sólido resultante se a região sob a curva $y = 1/(x^2 + 3x = 2)$ de $x = 0$ a $x = 1$ for girada em torno do: (a) eixo x e (b) eixo y.

65. Um método de retardar o crescimento de uma população de insetos sem usar pesticidas é introduzir na população um número de machos estéreis que cruzam com fêmeas férteis, mas não produzem filhotes. Se P representa o número de fêmeas na população de insetos, S, o número de machos estéreis introduzidos a cada geração e r, a taxa de crescimento populacional natural, então a população de fêmeas está relacionada com o instante t por

$$t = \int \frac{P + S}{P[(r-1)P - S]}\,dP$$

Suponha que uma população de insetos com 10 000 fêmeas cresça a uma taxa de $r = 0{,}10$ e que 900 machos estéreis sejam adicionados. Calcule a integral para dar uma equação relacionando a população de fêmeas com o tempo. (Observe que a equação resultante não pode ser resolvida explicitamente para P.)

66. Fatore $x^4 + 1$ como uma diferença de quadrados adicionando e subtraindo a mesma quantidade. Use essa fatoração para calcular $\int 1/(x^4 + 1)\,dx$.

SCA **67.** (a) Use um sistema de computação algébrica para encontrar a decomposição em frações parciais da função

$$f(x) = \frac{4x^3 - 27x^2 + 5x - 32}{30x^5 - 13x^4 + 50x^3 - 286x^2 - 299x - 70}$$

(b) Use a parte (a) para encontrar $\int f(x)\,dx$ (manualmente) e compare com o resultado usando um SCA para integrar f diretamente. Comente qualquer discrepância.

SCA **68.** (a) Encontre a decomposição em frações parciais da função

$$f(x) = \frac{12x^5 - 7x^3 - 13x^2 + 8}{100x^6 - 80x^5 + 116x^4 - 80x^3 + 41x^2 - 20x + 4}$$

(b) Utilize a parte (a) para encontrar $\int f(x)\,dx$ e trace f e sua integral indefinida na mesma tela.

(c) Use o gráfico de f para descobrir as características principais do gráfico de $\int f(x)\,dx$.

69. Suponha que F, G e Q sejam polinômios e

$$\frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{G(x)}{Q(x)}$$

para todo x, exceto quando $Q(x) = 0$. Demonstre que $F(x) = G(x)$ para todo x. (*Sugestão*: Use a continuidade.)

70. Se f é uma função quadrática tal que $f(0) = 1$ e

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x+1)^3}\,dx$$

é uma função racional, encontre o valor de $f'(0)$.

7.5 ESTRATÉGIAS DE INTEGRAÇÃO

Como vimos, a integração é mais desafiadora que a derivação. Para achar a derivada de uma função é óbvio qual fórmula de derivação devemos aplicar. Porém, não é necessariamente óbvio qual técnica devemos aplicar para integrar uma dada função.

Até agora, técnicas individuais têm sido aplicadas em cada seção. Por exemplo, usamos geralmente a substituição nos Exercícios 5.5, a integração por partes nos Exercícios 7.1 e as frações parciais nos Exercícios 7.4. Nesta seção, contudo, apresentaremos uma coleção de integrais misturadas aleatoriamente, e o principal desafio será reconhecer quais técnicas ou fórmulas deverão ser usadas. Regras fáceis e rápidas para a aplicação de um dado método em uma determinada situação não podem ser dadas, todavia, damos alguns conselhos sobre estratégias que você pode achar útil.

Um prerrequisito para a escolha da estratégia é o conhecimento das fórmulas básicas de integração. Na tabela seguinte juntamos as integrais de nossas listas anteriores com várias fórmulas adicionais que aprendemos neste capítulo. A maioria delas deveria ser memorizada. É útil conhecê-las todas, mas aquelas marcadas com asterisco não precisam ser

$$\int \sqrt{x^3+1}\,dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

De fato, a maioria das funções elementares não tem primitivas elementares. Você pode ter a certeza, entretanto, de que todas as integrais nos exercícios a seguir são funções elementares.

7.5 EXERCÍCIOS

1–80 Calcule a integral.

1. $\int \cos x\,(1+\operatorname{sen}^2 x)\,dx$

2. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}\,dx$

3. $\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

4. $\int \operatorname{tg}^3\theta\,d\theta$

5. $\int_0^2 \frac{2t}{(t-3)^2}\,dt$

6. $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^4}}\,dx$

7. $\int_{-1}^{1} \frac{e^{\operatorname{arctg} y}}{1+y^2}\,dy$

8. $\int x \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx$

9. $\int_1^3 r^4 \ln r\,dr$

10. $\int_0^4 \frac{x-1}{x^2-4x-5}\,dx$

11. $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx$

12. $\int \frac{x}{x^4+x^2+1}\,dx$

13. $\int \operatorname{sen}^3\theta \cos^5\theta\,d\theta$

14. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

15. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

16. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

17. $\int x \operatorname{sen}^2 x\,dx$

18. $\int \frac{e^{2t}}{1+e^{4t}}\,dt$

19. $\int e^{x+e^x}\,dx$

20. $\int \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx$

21. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$

22. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}\,dx$

23. $\int_0^1 \left(1+\sqrt{x}\right)^8 dx$

24. $\int \ln(x^2-1)\,dx$

25. $\int \frac{3x^2-2}{x^2-2x-8}\,dx$

26. $\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x-8}\,dx$

27. $\int \frac{dx}{1+e^x}$

28. $\int \operatorname{sen}\sqrt{at}\,dt$

29. $\int_0^5 \frac{3w-1}{w+2}\,dw$

30. $\int_{-2}^{2} |x^2-4x|\,dx$

31. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

32. $\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+3}\,dx$

33. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

34. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+4\operatorname{cotg} x}{4-\operatorname{cotg} x}\,dx$

35. $\int_{-1}^{1} x^8 \operatorname{sen} x\,dx$

36. $\int \operatorname{sen} 4x \cos 3x\,dx$

37. $\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \operatorname{tg}^2\theta\,d\theta$

38. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^5\theta \sec^3\theta\,d\theta$

39. $\int \frac{\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{\sec^2\theta-\sec\theta}\,d\theta$

40. $\int \frac{1}{\sqrt{4y^2-4y-3}}\,dy$

41. $\int \theta \operatorname{tg}^2\theta\,d\theta$

42. $\int \frac{\operatorname{tg}^{-1} x}{x^2}\,dx$

43. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

44. $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$

45. $\int x^5 e^{-x^3}\,dx$

46. $\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$

47. $\int x^3(x-1)^{-4}\,dx$

48. $\int \frac{x}{x^4-a^4}\,dx$

49. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x+1}}\,dx$

50. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x+1}}\,dx$

51. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+1}}\,dx$

52. $\int \frac{dx}{x(x^4+1)}$

53. $\int x^2 \operatorname{senh} mx\,dx$

54 $\int (x+\operatorname{sen} x)^2\,dx$

55. $\int \frac{dx}{x+x\sqrt{x}}$

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$

57. $\int x\sqrt[3]{x+c}\,dx$

58. $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

59. $\int \cos x \cos^3 x(\operatorname{sen} x)\,dx$

60. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2-1}}\,dx$

61. $\int \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx$

62. $\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx$

63. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\, 2x}{1 + \cos^4 x}\, dx$

64. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\text{tg}\, x)}{\text{sen}\, x \cos x}\, dx$

65. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}\, dx$

66. $\displaystyle\int_2^3 \frac{u^3 + 1}{u^3 - u^2}\, du$

67. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2}\, dx$

68. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + 2e^x - e^{-x}}\, dx$

69. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x}\, dx$

70. $\displaystyle\int \frac{\ln(x + 1)}{x^2}\, dx$

71. $\displaystyle\int \frac{x + \text{arcsen}\, x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

72. $\displaystyle\int \frac{4^x + 10^x}{2^x}\, dx$

73. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x^2+4)}\, dx$

74. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(2 + \sqrt{x})^4}$

75. $\displaystyle\int \frac{xe^x}{\sqrt{1 + e^x}}\, dx$

76. $\displaystyle\int (x^2 - bx)\, \text{sen}\, 2x\, dx$

77. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1 + x^3}\, dx$

78. $\displaystyle\int \frac{\sec x \cos 2x}{\text{sen}\, x + \sec x}\, dx$

79. $\displaystyle\int x\, \text{sen}^2 x \cos x\, dx$

80. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\, x \cos x}{\text{sen}^4 x + \cos^4 x}\, dx$

81. As funções $y = e^{x^2}$ e $y = x^2 e^{x^2}$ não têm primitivas expressas por meio de funções elementares, mas $y = (2x^2 + 1)\, e^{x^2}$ tem. Calcule $\int (2x^2 + 1)\, e^{x^2}\, dx$.

7.6 INTEGRAÇÃO USANDO TABELAS E SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO ALGÉBRICA

Nesta seção descrevemos como usar as tabelas e os sistemas de computação algébrica para integrar as funções que têm primitivas elementares. Você deve ter em mente, contudo, que até mesmo os mais poderosos sistemas não podem achar fórmulas explícitas para as primitivas de funções do tipo e^{x^2} ou outras funções descritas no final da Seção 7.5.

TABELAS DE INTEGRAIS

As tabelas de integrais indefinidas são muito úteis quando nos deparamos com uma integral que é difícil de calcular manualmente e não temos acesso a um sistema computação algébrica. Uma tabela relativamente curta de 120 integrais é dada no fim do livro. Tabelas mais extensas podem ser encontradas no *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, 31. ed., por Daniel Zwillinger, Boca Raton, FL: CRC Press, 1995 (709 entradas) ou no *Table of Integrals, Series and Products,* por Gradshteyn e Ryzhik's (Nova York, Academic Press, 2000), que contêm centenas de páginas de integrais. Devemos nos lembrar, contudo, que as integrais frequentemente não ocorrem da maneira exata como foram listadas nas tabelas. Geralmente temos de usar substituições ou manipulações algébricas para transformar a integral dada em uma das formas da tabela.

EXEMPLO 1 A região delimitada pelas curvas $y = \text{arctg}\, x$, $y = 0$ e $x = 1$ é girada em torno do eixo y. Encontre o volume do sólido resultante.

SOLUÇÃO Usando o método das cascas cilíndricas, vemos que o volume é

$$V = \int_0^1 2\pi x\, \text{arctg}\, x\, dx$$

Na seção da Tabela de Integrais com o título *Formas Trigonométricas Inversas* localizamos a Fórmula 92:

■ A Tabela de Integrais aparece nas Páginas de Referência, no final do livro.

$$\int u\, \text{tg}^{-1} u\, du = \frac{u^2 + 1}{2}\, \text{tg}^{-1} u - \frac{u}{2} + C$$

quando t se torna grande. De fato, esses valores convergem bem depressa, porque $e^{-x^2} \to 0$ muito rapidamente quando $x \to \infty$.

EXEMPLO 10 A integral $\int_1^\infty \frac{1 + e^{-x}}{x}\, dx$ é divergente pelo Teorema da Comparação porque

$$\frac{1 + e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$$

e $\int_1^\infty (1/x)\, dx$ é divergente pelo Exemplo 1 [ou por (2) com $p = 1$]. □

A Tabela 2 ilustra a divergência da integral do Exemplo 10. Parece que os valores não se aproximam de nenhum número fixado.

TABELA 2

t	$\int_1^t [(1 + e^{-x})/x]\,dx$
2	0,8636306042
5	1,8276735512
10	2,5219648704
100	4,8245541204
1 000	7,1271392134
10 000	9,4297243064

7.8 EXERCÍCIOS

1. Explique por que cada uma das seguintes integrais é imprópria.

(a) $\int_1^\infty x^4 e^{-x^4}\, dx$ (b) $\int_1^{\pi/2} \sec x\, dx$

(c) $\int_0^2 \frac{x}{x^2 - 5x + 6}\, dx$ (d) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 5}\, dx$

2. Quais das seguintes integrais é imprópria? Por quê?

(a) $\int_0^2 \frac{1}{2x - 1}\, dx$ (b) $\int_0^1 \frac{1}{2x - 1}\, dx$

(c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\, dx$ (d) $\int_1^2 \ln(x - 1)\, dx$

3. Encontre a área sob a curva $y = 1/x^3$ de $x = 1$ a $x = t$ e calcule-a para $t = 10$, 100 e 1 000. Então, encontre a área total abaixo dessa curva para $x \geq 1$.

4. (a) Trace as funções $f(x) = 1/x^{1,1}$ e $g(x) = 1/x^{0,9}$ nas janelas retangulares $[0, 10]$ por $[0, 1]$ e $[0, 100]$ por $[0, 1]$.
(b) Encontre as áreas sob os gráficos de f e g de $x = 1$ a $x = t$ e calcule para $t = 10$, 100, 10^4, 10^6, 10^{10} e 10^{20}.
(c) Calcule a área total sob cada curva para $x \geq 1$, se ela existir.

5–40 Determine se cada integral é convergente ou divergente. Calcule aquelas que são convergentes.

5. $\int_1^\infty \frac{1}{(3x + 1)^2}\, dx$

6. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2x - 5}\, dx$

7. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2 - w}}\, dw$

8. $\int_0^\infty \frac{x}{(x^2 + 2)^2}\, dx$

9. $\int_4^\infty e^{-y/2}\, dy$

10. $\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t}\, dt$

11. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1 + x^2}\, dx$

12. $\int_{-\infty}^\infty (2 - v^4)\, dv$

13. $\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2}\, dx$

14. $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

15. $\int_{2\pi}^\infty \operatorname{sen} \theta\, d\theta$

16. $\int_{-\infty}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$

17. $\int_1^\infty \frac{x + 1}{x^2 + 2x}\, dx$

18. $\int_0^\infty \frac{dz}{z^2 + 3z + 2}$

19. $\int_{-\infty}^1 x e^{2x}\, dx$

20. $\int_{-\infty}^6 r e^{r/3}\, dr$

21. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\, dx$

22. $\int_{-\infty}^\infty x^3 e^{-x^4}\, dx$

23. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{9 + x^6}\, dx$

24. $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 3}\, dx$

25. $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\, dx$

26. $\int_0^\infty \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1 + x^2)^2}\, dx$

27. $\int_0^1 \frac{3}{x^5}\, dx$

28. $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3 - x}}\, dx$

29. $\int_{-2}^{14} \frac{1}{\sqrt[4]{x + 2}}\, dx$

30. $\int_6^8 \frac{4}{(x - 6)^3}\, dx$

31. $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4}\, dx$

32. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

33. $\int_0^{33} (x - 1)^{-1/5}\, dx$

34. $\int_0^1 \frac{1}{4y - 1}\, dy$

35. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$

36. $\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{cossec} x\, dx$

37. $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\, dx$

38. $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\, dx$

39. $\int_0^2 z^2 \ln z\, dz$

40. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$

41–46 Esboce a região e encontre sua área (se a área for finita).

41. $S = \{(x, y) | x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant e^x\}$

42. $S = \{(x, y) | x \geqslant -2, 0 \leqslant y \leqslant e^{-x/2}\}$

43. $S = \{(x, y) | 0 \leqslant y \leqslant 2/(x^2 + 9)\}$

44. $S = \{(x, y) | x \geqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant x/(x^2 + 9)\}$

45. $S = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, 0 \leqslant y \leqslant \sec^2 x\}$

46. $S = \{(x, y) | -2 < x \leqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant 1/\sqrt{x + 2}\}$

47. (a) Se $g(x) = (\text{sen}^2 x)/x^2$, use sua calculadora ou computador para fazer uma tabela de valores aproximados de $\int_1^t g(x)\,dx$ para $t = 2$, 5, 10, 100, 1 000 e 10 000. Parece que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente?

(b) Use o Teorema da Comparação com $f(x) = 1/x^2$ para mostrar que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente.

(c) Ilustre a parte (b) traçando f e g na mesma tela para $1 \leqslant x \leqslant 10$. Use seu gráfico para explicar intuitivamente por que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ é convergente.

48. (a) Se $g(x) = 1/(\sqrt{x} - 1)$, use sua calculadora ou computador para fazer uma tabela de valores aproximados de $\int_2^t g(x)\,dx$ para $t = 5$, 10, 100, 1 000 e 10 000. Parece que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é convergente ou divergente?

(b) Use o Teorema da Comparação com $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para mostrar que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é divergente.

(c) Ilustre a parte (b) colocando em um gráfico f e g na mesma tela para $2 \leqslant x \leqslant 20$. Use seu gráfico para explicar intuitivamente por que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ é divergente.

49–54 Use o Teorema da Comparação para determinar se a integral é convergente ou divergente.

49. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3 + 1}\,dx$

50. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2 + e^{-x}}{x}\,dx$

51. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x + 1}{\sqrt{x^4 - x}}\,dx$

52. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\text{arctg}\, x}{2 + e^x}\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}\,dx$

54. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\text{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$

55. A integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx$$

é imprópria por duas razões: o intervalo $[0, \infty)$ é infinito e o integrando tem uma descontinuidade infinita em 0. Calcule-a expressando-a como uma soma de integrais impróprias do Tipo 2 e do Tipo 1, como a seguir:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx$$

56. Calcule

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 4}}\,dx$$

pelo mesmo método do Exercício 55.

57–59 Encontre os valores de p para os quais a integral converge e calcule a integral para estes valores de p.

57. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$

58. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{(\ln x)^p}\,dx$

59. $\displaystyle\int_0^1 x^p \ln x\,dx$

60. (a) Calcule a integral $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ para $n = 0, 1, 2$ e 3.

(b) Conjecture o valor de $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ quando n é um inteiro positivo arbitrário.

(c) Demonstre sua conjectura usando a indução matemática.

61. (a) Mostre que $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ é divergente.

(b) Mostre que

$$\lim_{t \to \infty} \int_{-t}^t x\,dx = 0$$

Isso mostra que não podemos definir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_{-t}^t f(x)\,dx$$

62. A *velocidade média* das moléculas em um gás ideal é

$$\overline{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\,dv$$

em que M é o peso molecular do gás; R, a constante do gás; T, a temperatura do gás; e v, a velocidade molecular. Mostre que

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

63. Sabemos do Exemplo 1 que a região $\mathcal{R} = \{(x, y) | x \geqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$ tem área infinita. Mostre que pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x obtemos um sólido com volume finito.

64. Use a informação e os dados dos Exercícios 29 e 30 da Seção 6.4 para calcular o trabalho necessário para lançar um satélite de 1 000 kg para fora do campo gravitacional da Terra.

65. Calcule a *velocidade de escape* v_0 necessária para lançar um foguete de massa m para fora do campo gravitacional de um planeta com massa M e raio R. Use a Lei de Newton da Gravitação (veja o Exercício 29 na Seção 6.4) e o fato de que a energia cinética inicial de $\frac{1}{2} m v_0^2$ supre o trabalho necessário.

66. Os astrônomos usam uma técnica chamada *estereografia estelar* para determinar a densidade de estrelas em um aglomerado estelar a partir da densidade (bidimensional) observada, que pode ser analisada a partir de uma fotografia. Suponha que em um aglomerado esférico de raio R a densidade de estrelas dependa somente da distância r do centro do aglomerado. Se a densidade estelar aparente for dada por $y(s)$, onde s é a distância planar observada do centro do aglomerado e $x(r)$ é a densidade real, pode ser mostrado que

$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 - s^2}}\, x(r)\, dr$$

Se a densidade real de estrelas em um aglomerado for $x(r) = \frac{1}{2}(R - r)^2$, ache a densidade aparente $y(s)$.

67. Um fabricante de lâmpadas quer produzir lâmpadas que durem cerca de 700 horas, mas naturalmente algumas lâmpadas queimam mais rapidamente que outras. Seja $F(t)$ a fração de lâmpadas da companhia que queimam antes de t horas; assim $F(t)$ está entre 0 e 1.

(a) Faça um esboço de como você acha que o gráfico de F deve parecer.

(b) Qual o significado da derivada $r(t) = F'(t)$?

(c) Qual é o valor de $\int_0^\infty r(t)\, dt$? Por quê?

68. Como vimos na Seção 3.8, uma substância radioativa decai exponencialmente: a massa no tempo t é $m(t) = m(0)e^{kt}$, onde $m(0)$ é a massa inicial e k, uma constante negativa. A *vida média M* de um átomo na substância é

$$M = -k \int_0^\infty t e^{kt}\, dt$$

Para o isótopo radioativo de carbono, ^{14}C, usado para a datação, o valor de k é $-0{,}000121$. Calcule a vida média de um átomo de ^{14}C.

69. Determine o quão grande tem de ser o número a de modo que

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2 + 1}\, dx < 0{,}001$$

70. Estime o valor numérico de $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ escrevendo a integral como uma soma de $\int_0^4 e^{-x^2}\, dx$ e $\int_4^\infty e^{-x^2}\, dx$. Aproxime a primeira integral usando a Regra de Simpson com $n = 8$ e mostre que a segunda integral é menor que $\int_4^\infty e^{-4x}\, dx$, que é menor que 0,0000001.

71. Se $f(t)$ é contínua para $t \geq 0$, a *Transformada de Laplace* de f é a função F definida por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt$$

e o domínio de F é o conjunto de todos os números s para os quais a integral converge. Calcule a Transformada de Laplace das seguintes funções.

(a) $f(t) = 1$ (b) $f(t) = e^t$ (c) $f(t) = t$

72. Mostre que se $0 \leq f(t) \leq Me^{at}$ para $t \geq 0$, onde M e a são constantes, então a Transformada de Laplace $F(s)$ existe para $s > a$.

73. Suponha que $0 \leq f(t) \leq Me^{at}$ e $0 \leq f'(t) \leq Ke^{at}$ para $t \geq 0$, onde f' é contínua. Se a Transformada de Laplace de $f(t)$ é $F(s)$ e a Transformada de Laplace de $f'(t)$ é $G(s)$, mostre que

$$G(s) = sF(s) - f(0) \qquad s > a$$

74. Se $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ é convergente e a e b são números reais, mostre que

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx + \int_a^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^b f(x)\, dx + \int_b^\infty f(x)\, dx$$

75. Mostre que $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$.

76. Mostre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y}\, dy$ interpretando as integrais como áreas.

77. Calcule o valor da constante C para a qual a integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{C}{x + 2}\right) dx$$

converge. Calcule a integral para esse valor de C.

78. Ache o valor da constante C para o qual a integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{C}{3x + 1}\right) dx$$

converge. Calcule a integral para esse valor de C.

79. Suponha que f seja contínua em $[0, \infty)$ e que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$. É possível que $\int_0^\infty f(x)\, dx$ seja convergente?

80. Mostre que se $a > -1$ e $b > a + 1$, então a seguinte integral é convergente.

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1 + x^b}\, dx$$

7 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Escreva a regra de integração por partes. Na prática, como você a usa?

2. Como você calcula $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ se m é ímpar? O que acontece se n é ímpar? O que acontece se m e n são pares?

3. Se a expressão $\sqrt{a^2 - x^2}$ aparece em uma integral, que substituição você pode tentar? O que acontece se $\sqrt{a^2 + x^2}$ aparece? O que acontece se $\sqrt{x^2 - a^2}$ aparece?

4. Qual é a forma da expansão em frações parciais de uma função racional $P(x)/Q(x)$ se o grau de P é menor que o grau de Q e $Q(x)$ tem apenas os fatores lineares distintos? O que acontece se um fator linear é repetido? O que acontece se $Q(x)$ tem um fator quadrático irredutível (não repetido)? O que acontece se o fator quadrático é repetido?

5. Escreva as regras para a aproximação da integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ pela Regra do Ponto Médio, pela Regra do Trapézio e pela Regra de Simpson. De qual você espera a melhor estimativa? Como você aproxima o erro para cada regra?

6. Defina as seguintes integrais impróprias.

(a) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ (b) $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ (c) $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$

7. Defina a integral imprópria $\int_a^b f(x)\,dx$ para cada um dos seguintes casos.

(a) f tem uma descontinuidade infinita em a.
(b) f tem uma descontinuidade infinita em b.
(c) f tem uma descontinuidade infinita em c, onde $a < c < b$.

8. Enuncie o Teorema da Comparação para as integrais impróprias.

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. $\dfrac{x(x^2+4)}{x^2-4}$ pode ser colocado na forma $\dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-2}$.

2. $\dfrac{x^2+4}{x(x^2-4)}$ pode ser colocado na forma $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x-2}$.

3. $\dfrac{x^2+4}{x(x^2-4)}$ pode ser colocado na forma $\dfrac{A}{x^2} + \dfrac{B}{x-4}$.

4. $\dfrac{x^2-4}{x(x^2+4)}$ pode ser colocado na forma $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2+4}$.

5. $\int_0^4 \dfrac{x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln 15$

6. $\int_1^\infty \dfrac{1}{x^{\sqrt{2}}}\,dx$ é convergente.

7. Se f for contínua, então $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t f(x)\,dx$.

8. A Regra do Ponto Médio é sempre mais precisa que a Regra do Trapézio.

9. (a) Toda função elementar tem uma derivada elementar.

(b) Toda função elementar tem uma primitiva elementar.

10. Se f é contínua em $[0, \infty)$ e $\int_1^\infty f(x)\,dx$ é convergente, então $\int_0^\infty f(x)\,dx$ é convergente.

11. Se f é uma função contínua, decrescente em $[1, \infty)$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, então $\int_1^\infty f(x)\,dx$ é convergente.

12. Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_a^\infty g(x)\,dx$ são ambas convergentes, então $\int_a^\infty [f(x) + g(x)]\,dx$ é convergente.

13. Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_a^\infty g(x)\,dx$ são ambas divergentes, então $\int_a^\infty [f(x) + g(x)]\,dx$ é divergente.

14. Se $f(x) \leqslant g(x)$ e $\int_0^\infty g(x)\,dx$ diverge, então $\int_0^\infty f(x)\,dx$ também diverge.

EXERCÍCIOS

Observação: prática adicional nas técnicas de integração é fornecida no Exercício 7.5.

1–40 Calcule a integral.

1. $\int_0^5 \dfrac{x}{x+10}\,dx$

2. $\int_0^5 ye^{-0{,}06y}\,dy$

3. $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$

4. $\int_1^4 \dfrac{dt}{(2t+1)^3}$

5. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta\,d\theta$

6. $\int \dfrac{1}{y^2-4y-12}\,dy$

7. $\int \dfrac{\operatorname{sen}(\ln t)}{t}\,dt$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

9. $\int_1^4 x^{3/2}\ln x\,dx$

10. $\int_0^1 \dfrac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$

11. $\int_1^2 \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

12. $\int_{-1}^1 \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$

13. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$

14. $\int \dfrac{x^2+2}{x+2}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{\sec^6\theta}{\operatorname{tg}^2\theta}\,d\theta$

17. $\displaystyle\int x\sec x\operatorname{tg} x\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2+8x-3}{x^3+3x^2}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{x+1}{9x^2+6x+5}\,dx$

20. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5\theta\sec^3\theta\,d\theta$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}$

22. $\displaystyle\int te^{\sqrt{t}}\,dt$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

24. $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{3x^3-x^2+6x-4}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

26. $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\cos x\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\operatorname{sen} 2x\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$

29. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^5\sec x\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

31. $\displaystyle\int_0^{\ln 10}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+8}$

32. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{x\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}\,dx$

34. $\displaystyle\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+x^{3/2}}}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta}\,d\theta$

37. $\displaystyle\int (\cos x+\operatorname{sen} x)^2\cos 2x\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)^3}\,dx$

39. $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx$

40. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\theta}}{\operatorname{sen} 2\theta}\,d\theta$

41–50 Calcule a integral ou mostre que ela é divergente.

41. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$

42. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x^4}\,dx$

43. $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}\,dx$

44. $\displaystyle\int_2^{6}\frac{y}{\sqrt{y-2}}\,dy$

45. $\displaystyle\int_0^{4}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

46. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1}{2-3x}\,dx$

47. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

48. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x}$

49. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{4x^2+4x+5}$

50. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^{-1}x}{x^2}\,dx$

51–52 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável traçando a função e sua primitiva (tome $C = 0$).

51. $\displaystyle\int \ln(x^2+2x+2)\,dx$

52. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

53. Desenhe a função $f(x) = \cos^2 x\operatorname{sen}^3 x$ e use o gráfico para conjecturar o valor da integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. Então, calcule a integral para confirmar sua conjectura.

SCA **54.** (a) Como você calcularia $\int x^5e^{-2x}\,dx$ manualmente? (Não faça a integração.)
(b) Como você calcularia $\int x^5e^{-2x}\,dx$ usando tabelas? (Não faça isso de fato.)
(c) Use um SCA para calcular $\int x^5e^{-2x}\,dx$.
(d) Trace o integrando e a integral indefinida na mesma tela.

55–58 Use a Tabela de Integrais no fim do livro para calcular a integral.

55. $\displaystyle\int \sqrt{4x^2-4x-3}\,dx$

56. $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^5 t\,dt$

57. $\displaystyle\int \sqrt{4+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

58. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cotg} x}{\sqrt{1+2\operatorname{sen} x}}\,dx$

59. Verifique a Fórmula 33 na Tabela de Integrais (a) por derivação e (b) usando uma substituição trigonométrica.

60. Verifique a Fórmula 62 da Tabela de Integrais.

61. É possível encontrar um número n tal que $\int_0^{\infty} x^n\,dx$ *seja convergente?*

62. Para quais valores de a a integral $\int_0^{\infty} e^{ax}\cos x\,dx$ é convergente? Calcule a integral para esses valores de a.

63–64 Use (a) a Regra do Trapézio, (b) a Regra do Ponto Médio e (c) a Regra de Simpson com $n = 10$ para aproximar a integral dada. Arredonde seus resultados para seis casas decimais.

63. $\displaystyle\int_2^{4}\frac{1}{\ln x}\,dx$

64. $\displaystyle\int_1^{4}\sqrt{x}\cos x\,dx$

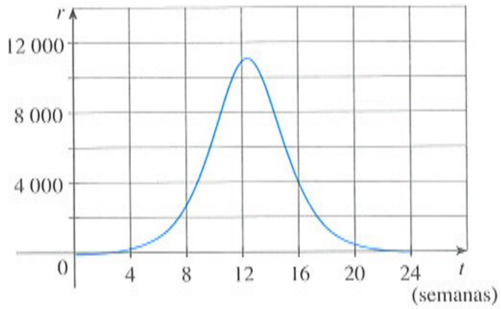
65. Estime os erros envolvidos no Exercício 63, partes (a) e (b). Quão grande deve ser n em cada caso para garantir um erro menor que 0,00001?

66. Use a Regra de Simpson com $n = 6$ para estimar a área sob a curva $y = e^x/x$ de $x = 1$ a $x = 4$.

67. A leitura do velocímetro (v) em um carro foi observada em intervalos de 1 minuto e os dados foram anotados na tabela a seguir. Use a Regra de Simpson para estimar a distância percorrida pelo carro.

t (min)	v (km/h)	t (min)	v (km/h)
0	64	6	90
1	67	7	91
2	72	8	91
3	78	9	88
4	83	10	90
5	86		

68. Uma população de abelhas cresce a uma taxa de $r(t)$ abelhas por semana (o gráfico de r é mostrado). Use a Regra de Simpson com 6 subintervalos para estimar o aumento da população de abelhas durante as primeiras 24 semanas.

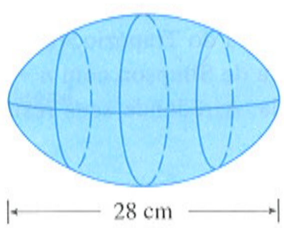


SCA **69.** (a) Se $f(x) = \text{sen}(\text{sen } x)$, utilize um gráfico para encontrar um limitante superior para $|f^{(4)}(x)|$.

(b) Use a Regra de Simpson com $n = 10$ para aproximar $\int_0^{\pi} f(x)\, dx$ e use a parte (a) para estimar o erro.

(c) Quão grande deve ser n para garantir que o tamanho do erro ao usar S_n seja menor que 0,00001?

70. Suponha que lhe peçam para estimar o volume de uma bola de futebol americano. Você mede e descobre que a bola tem 28 cm de comprimento. Você usa um barbante e mede a circunferência no ponto mais largo como 53 cm. A circunferência a 7 cm de cada extremo é 45 cm. Use a Regra de Simpson para fazer sua estimativa.



71. Use o Teorema da Comparação para determinar se a integral

$$\int_1^{\infty} \frac{x^3}{x^5 + 2}\, dx$$

é convergente ou divergente.

72. Encontre a área da região delimitada pela hipérbole $y^2 - x^2 = 1$ e pela reta $y = 3$.

73. Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = \cos x$ e $y = \cos^2 x$ entre $x = 0$ e $x = \pi$.

74. Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = 1/(2 + \sqrt{x})$, $y = 1/(2 - \sqrt{x})$ e $x = 1$.

75. A região sob a curva $y = \cos^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, é girada em torno do eixo x. Calcule o volume do sólido resultante.

76. A região do Exercício 75 é girada em torno do eixo y. Calcule o volume do sólido resultante.

77. Se f' é contínua em $[0, \infty)$ e $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, mostre que

$$\int_0^{\infty} f'(x)\, dx = -f(0)$$

78. Podemos estender nossa definição de valor médio de uma função contínua a um intervalo infinito definindo o valor médio de f no intervalo $[a, \infty)$ como

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t - a} \int_a^t f(x)\, dx$$

(a) Calcule o valor médio de $y = \text{tg}^{-1} x$ no intervalo $[0, \infty)$.

(b) Se $f(x) \geqslant 0$ e $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ for divergente, mostre que o valor médio de f no intervalo $[a, \infty)$ é $\lim_{x \to \infty} f(x)$, se o limite existir.

(c) Se $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ for convergente, qual o valor médio de f no intervalo $[a, \infty)$?

(d) Calcule o valor médio de $y = \text{sen } x$ no intervalo $[0, \infty)$.

79. Use a substituição $u = 1/x$ para mostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x^2}\, dx = 0$$

80. A intensidade da força de repulsão entre duas cargas pontuais com o mesmo sinal, uma com carga 1 e outra com carga q, é

$$F = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

em que r é a distância entre as cargas e ε_0, uma constante. O *potencial* V no ponto P devido a carga q é definido como o trabalho realizado para trazer uma carga unitária do infinito até P ao longo da reta que liga q e P. Encontre uma fórmula para V.

PROBLEMAS

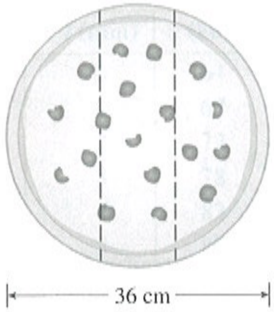


FIGURA PARA O PROBLEMA 1

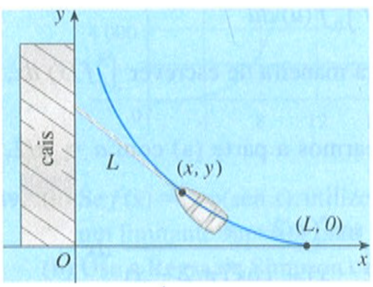


FIGURA PARA O PROBLEMA 6

1. Três estudantes de Matemática pediram uma pizza de 36 centímetros. Em vez de fatiá-la da maneira tradicional, eles decidiram fatiá-la com cortes paralelos, como mostrado na figura. Sendo estudantes de Matemática, eles foram capazes de determinar onde fatiar de maneira que a cada um coubesse a mesma quantidade de pizza. Onde foram feitos os cortes?

2. Calcule $\int \dfrac{1}{x^7 - x}\, dx$.

   O ataque direto seria começar com frações parciais, mas isso seria brutal. Tente uma substituição.

3. Calcule $\int_0^1 \left(\sqrt[3]{1 - x^7} - \sqrt[7]{1 - x^3}\right) dx$.

4. Os centros de dois discos de raio 1 estão separados de uma unidade. Encontre a área da união dos círculos.

5. Uma elipse é cortada de um círculo de raio a. O eixo maior da elipse coincide com um diâmetro do círculo e o eixo menor tem comprimento $2b$. Demonstre que a área da parte restante do círculo é a mesma que a de uma elipse com semieixos a e $a - b$.

6. Um homem inicialmente parado em um ponto O anda ao longo de um cais puxando uma canoa por uma corda de comprimento L. O homem mantém a corda reta e tensa. O caminho percorrido pela canoa é uma curva chamada *tractriz* (involuta de uma catenária) e esta tem a propriedade de que a corda é sempre tangente à curva (veja a figura).
   (a) Mostre que se o caminho percorrido pela canoa é o gráfico da função $y = f(x)$, então
   $$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{L^2 - x^2}}{x}$$
   (b) Determine a função $y = f(x)$.

7. Uma função f é definida por
   $$f(x) = \int_0^{\pi} \cos t \cos(x - t)\, dt \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$
   Ache o valor mínimo de f.

8. Se n é um inteiro positivo, demonstre que
   $$\int_0^1 (\ln x)^n\, dx = (-1)^n n!$$

9. Mostre que
   $$\int_0^1 (1 - x^2)^n\, dx = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n + 1)!}$$
   Sugestão: Comece mostrando que se I_n denota a integral, então
   $$I_{k+1} = \frac{2k + 2}{2k + 3} I_k$$

10. Suponha que f seja uma função positiva tal que f' é contínua.
    (a) Como o gráfico de $y = f(x)$ sen nx está relacionado ao gráfico de $y = f(x)$? O que acontece quando $n \to \infty$?
    (b) Faça uma conjectura para o valor do limite
    $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} nx\, dx$$
    baseada em gráficos do integrando.

(c) Usando integração por partes, confirme a conjectura que você fez na parte (b). [Use o fato de que, como f' é contínua, existe uma constante M tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.]

11. Se $0 < a < b$, calcule $\lim_{t \to 0} \left\{ \int_0^1 [bx + a(1 - x)]^t \, dx \right\}^{1/t}$.

12. Trace $f(x) = \operatorname{sen}(e^x)$ e use o gráfico para estimar o valor de t tal que $\int_t^{t+1} f(x)\, dx$ seja máximo. Então, calcule o valor exato de t que maximiza a integral.

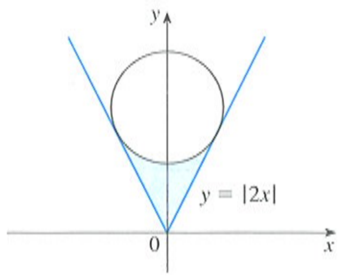


FIGURA PARA O PROBLEMA 13

13. A circunferência de raio 1 mostrada na figura toca a curva $y = |2x|$ duas vezes. Determine a área da região que se encontra entre as duas curvas.

14. Um foguete é lançado verticalmente, consumindo combustível a uma taxa constante de b quilogramas por segundo. Seja $v = v(t)$ a velocidade do foguete no instante t e suponha que a velocidade de emissão de gases u seja constante. Considere $M = M(t)$ como a massa do foguete no tempo t e observe que M decresce a medida que o combustível é consumido. Desprezando a resistência do ar, segue da Segunda Lei de Newton que

$$F = M \frac{dv}{dt} - ub$$

em que a força $F = -Mg$. Assim

$$\boxed{1} \qquad M \frac{dv}{dt} - ub = -Mg$$

Sejam M_1 a massa do foguete sem combustível, M_2 a massa inicial de combustível e $M_0 = M_1 + M_2$. Então, até ele ficar sem combustível no tempo $t = M_2 b$, sua massa é $M = M_0 - bt$.

(a) Substitua $M = M_0 - bt$ na Equação 1 e isole v na equação resultante. Use a condição inicial $v(0) = 0$ para determinar a constante.

(b) Determine a velocidade do foguete no instante $t = M_2/b$. Esta é chamada *velocidade terminal*.

(c) Determine a altura $y = y(t)$ do foguete no tempo terminal.

(d) Determine a altura do foguete em um instante t qualquer.

15. Use integração por partes para mostrar que, para todo $x > 0$,

$$0 < \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{\ln(1 + x + t)}\, dt < \frac{2}{\ln(1 + x)}$$

16. Suponha que $f(1) = f'(1) = 0$, f'' seja contínua em $[0, 1]$ e $|f''(x)| \leqslant 3$ para todo x. Mostre que

$$\left| \int_0^1 f(x)\, dx \right| \leqslant \frac{1}{2}$$