A Propriedade 8 é útil quando tudo o que queremos é uma estimativa grosseira do tamanho de uma integral sem nos preocupar com o uso da Regra do Ponto Médio.

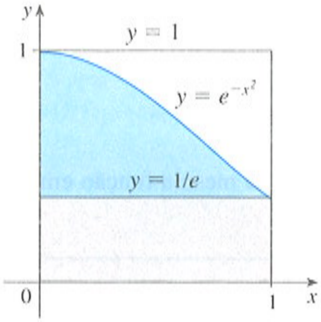


FIGURA 17

EXEMPLO 8 Use a Propriedade 8 para estimar o valor de $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

SOLUÇÃO Uma vez que $f(x) = e^{-x^2}$ é uma função decrescente no intervalo $[0, 1]$, seu máximo absoluto é $M = f(0) = 1$ e seu mínimo absoluto é $m = f(1) = e^{-1}$. Assim, usando a Propriedade 8,

$$e^{-1}(1 - 0) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1(1 - 0)$$

ou

$$e^{-1} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

Como $e^{-1} \approx 0{,}3679$, podemos escrever

$$0{,}367 \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$ □

O resultado do Exemplo 8 é ilustrado na Figura 17. A integral é maior que a área do retângulo inferior e menor que a área do quadrado.

5.2 EXERCÍCIOS

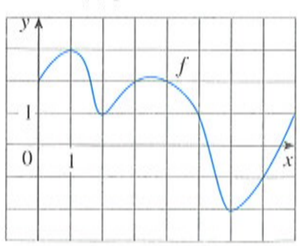
1. Calcule a soma de Riemann para $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$, $2 \leqslant x \leqslant 14$, com quatro subintervalos, tomando os pontos amostrais como as extremidades direitas. Explique, com a ajuda de um diagrama, o que representa a soma de Riemann.

2. Se $f(x) = \ln x - 1$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, calcule a soma de Riemann com $n = 6$, tomando como pontos amostrais as extremidades esquerdas. (Dê sua resposta correta até a sexta casa decimal.) O que representa a soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

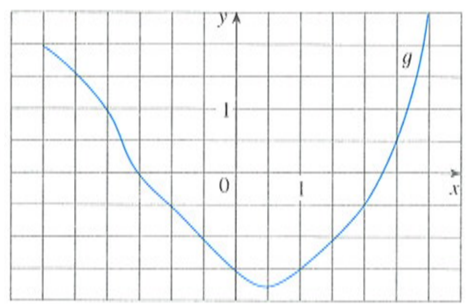
3. Se $f(x) = \sqrt{x} - 2$, $1 \leqslant x \leqslant 6$, calcule a soma de Riemann com $n = 5$ correta até a sexta casa decimal, tomando como pontos amostrais os pontos médios. O que representa a soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

4. (a) Ache a soma de Riemann para $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$, com seis termos, tomando como pontos amostrais as extremidades direitas. (Dê sua resposta correta até a sexta casa decimal.) Explique o que representa a soma de Riemann com a ajuda de um esboço.
(b) Repita a parte (a) tomando como pontos amostrais os pontos médios.

5. É dado o gráfico de uma função f. Estime $\int_0^8 f(x)\,dx$ utilizando quatro subintervalos com (a) extremidades direitas, (b) extremidades esquerdas e (c) pontos médios.



6. O gráfico de g é apresentado. Estime $\int_{-3}^{3} g(x)\,dx$ com seis subintervalos usando (a) extremidades direitas, (b) extremidades esquerdas e (c) pontos médios.



7. Uma tabela de valores de uma função crescente f é dada. Use a tabela para encontrar uma estimativa inferior e superior para $\int_0^{25} f(x)\,dx$.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	−42	−37	−25	−6	15	36

8. A tabela fornece os valores de uma função obtidos experimentalmente. Use-os para estimar $\int_3^9 f(x)\,dx$ utilizando três subintervalos iguais com (a) extremidades direitas, (b) extremidades esquerdas e (c) pontos médios. Se for sabido que a função é decrescente, você pode dizer se suas estimativas são menores ou maiores que o valor exato da integral?

x	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	−3,4	−2,1	−0,6	0,3	0,9	1,4	1,8

9–12 Use a Regra do Ponto Médio com o valor dado n para aproximar a integral. Arredonde cada resposta para quatro casas decimais.

9. $\int_2^{10} \sqrt{x^3 + 1}\, dx, \quad n = 4$

10. $\int_0^{\pi} \sec(x/3)\, dx, \quad n = 6$

11. $\int_0^1 \text{sen}(x^2)\, dx, \quad n = 5$

12. $\int_2^4 x \ln x\, dx, \quad n = 4$

SCA **13.** Se você tiver um SCA que possa calcular as aproximações pelo Ponto Médio e fazer o gráfico dos retângulos correspondentes (use os comandos middlesum e middlebox do Maple), verifique a resposta do Exercício 11 e ilustre com um gráfico. Repita então com $n = 10$ e $n = 20$.

14. Com uma calculadora programável ou computador (veja as instruções para o Exercício 7 da Seção 5.1), calcule as somas de Riemann esquerda e direita para a função $f(x) = \text{sen}(x^2)$ no intervalo $[0, 1]$ com $n = 100$. Explique por que essas estimativas mostram que

$$0{,}306 < \int_0^1 \text{sen}(x^2)\, dx < 0{,}315$$

Deduza que a aproximação usando a Regra do Ponto Médio com $n = 5$ no Exercício 11 é precisa até a segunda casa decimal.

15. Use uma calculadora ou um computador para fazer uma tabela dos valores das somas R_n de Riemann à direita para a integral $\int_0^{\pi} \text{sen}\, x\, dx$ com $n = 5, 10, 50$ e 100. De qual valor esses números parecem estar se aproximando?

16. Use uma calculadora ou um computador para fazer uma tabela dos valores das somas L_n e R_n de Riemann à esquerda e à direita para a integral $\int_0^2 e^{-x^2}\, dx$ com $n = 5, 10, 50$ e 100. Entre quais dois números o valor da integral deve ficar? Você pode fazer uma afirmação análoga para a integral $\int_{-1}^2 e^{-x^2}\, dx$? Explique.

17–20 Expresse o limite como uma integral definida no intervalo dado.

17. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1 + x_i^2)\Delta x, \quad [2, 6]$

18. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\cos x_i}{x_i}\Delta x, \quad [\pi, 2\pi]$

19. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2x_i^* + (x_i^*)^2}\,\Delta x, \quad [1, 8]$

20. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [4 - 3(x_i^*)^2 + 6(x_i^*)^5]\Delta x, \quad [0, 2]$

21-25 Use a forma da definição de integral dada no Teorema 4 para calcular a integral.

21. $\int_{-1}^{5} (1 + 3x)\, dx$

22. $\int_1^4 (x^2 + 2x - 5)\, dx$

23. $\int_0^2 (2 - x^2)\, dx$

24. $\int_0^5 (1 + 2x^3)\, dx$

25. $\int_1^2 x^3\, dx$

26. (a) Encontre uma aproximação para a integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$ usando uma soma de Riemann com as extremidades direitas e $n = 8$.

(b) Faça um diagrama como a Figura 3 para ilustrar a aproximação da parte (a).

(c) Use o Teorema 4 para calcular $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$.

(d) Interprete a integral da parte (c) como uma diferença de áreas e ilustre com diagramas como o da Figura 4.

27. Demonstre que $\int_a^b x\, dx = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$.

28. Demonstre que $\int_a^b x^2\, dx = \dfrac{b^3 - a^3}{3}$.

29–30 Expresse a integral como um limite de somas. Não calcule o limite.

29. $\int_2^6 \dfrac{x}{1 + x^5}\, dx$

30. $\int_1^{10} (x - 4 \ln x)\, dx$

SCA **31–32** Expresse a integral como um limite de somas. Depois, calcule, usando um sistema de computação algébrica para encontrar a soma e o limite.

31. $\int_0^{\pi} \text{sen}\, 5x\, dx$

32. $\int_2^{10} x^6\, dx$

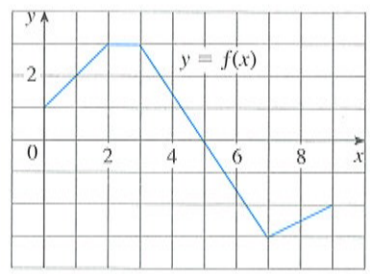
33. O gráfico de f está mostrado. Calcule cada integral interpretando-a em termos das áreas.

(a) $\int_0^2 f(x)\, dx$

(b) $\int_0^5 f(x)\, dx$

(c) $\int_5^7 f(x)\, dx$

(d) $\int_0^9 f(x)\, dx$

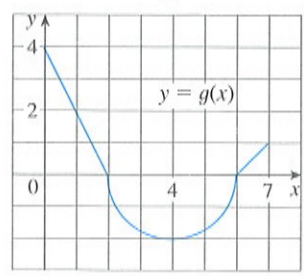


34. O gráfico de g consiste em duas retas e um semicírculo. Use-o para calcular cada integral.

(a) $\int_0^2 g(x)\, dx$

(b) $\int_2^6 g(x)\, dx$

(c) $\int_0^7 g(x)\, dx$



35–40 Calcule a integral, interpretando-a em termos das áreas.

35. $\int_1^3 (1 + 2x)\, dx$

36. $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$

37. $\int_{-3}^{0} (1 + \sqrt{9 - x^2})\, dx$

38. $\int_{-1}^{3} (3 - 2x)\, dx$

39. $\int_{-1}^{2} |x|\, dx$

40. $\int_1^{10} |x - 5|\, dx$

41. Calcule $\int_{\pi}^{\pi} \text{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$.

42. Dado que $\int_0^1 3x\sqrt{x^2 + 4}\, dx = 5\sqrt{5} - 8$, o que é $\int_1^0 3u\sqrt{u^2 + 4}\, du$?

43. No Exemplo 2 da Seção 5.1 mostramos que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Use esse fato e as propriedades das integrais para calcular $\int_0^1 (5 - 6x^2)\,dx$.

44. Use as propriedades das integrais e o resultado do Exemplo 3 para calcular $\int_1^3 (2e^x - 1)\,dx$.

45. Use o resultado do Exemplo 3 para calcular $\int_1^3 e^{x+2}\,dx$.

46. Use o resultado do Exercício 27 e o fato de que $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 1$ (do Exercício 25 na Seção 5.1), com as propriedades das integrais, para calcular $\int_0^{\pi/2} (2\cos x - 5x)\,dx$.

47. Escreva como uma integral única na forma $\int_a^b f(x)\,dx$:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{5} f(x)\,dx - \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$$

48. Se $\int_1^5 f(x)\,dx = 12$ e $\int_4^5 f(x)\,dx = 3{,}6$, encontre $\int_1^4 f(x)\,dx$.

49. Se $\int_0^9 f(x)\,dx = 37$ e $\int_0^9 g(x)\,dx = 16$, encontre $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,dx$.

50. Encontre $\int_0^5 f(x)\,dx$ se

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{para } x < 3 \\ x & \text{para } x \geqslant 3 \end{cases}$$

51. Suponha que f tenha um valor mínimo absoluto m e um valor máximo absoluto M. Entre quais dois valores $\int_0^2 f(x)\,dx$ deve ficar? Que propriedade das integrais lhe permitem tirar esta conclusão?

52–54 Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade sem calcular as integrais.

52. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x}\,dx$

53. $2 \leqslant \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx \leqslant 2\sqrt{2}$

54. $\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leqslant \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\,dx \leqslant \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{24}$

55–60 Use a Propriedade 8 para estimar o valor da integral.

55. $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

56. $\int_0^2 \dfrac{1}{1 + x^2}\,dx$

57. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{tg} x\,dx$

58. $\int_0^2 (x^3 - 3x + 3)\,dx$

59. $\int_0^2 xe^{-x}\,dx$

60. $\int_{\pi}^{2\pi} (x - 2\operatorname{sen} x)\,dx$

61–62 Use as propriedades das integrais, junto com os Exercícios 27 e 28, para demonstrar a desigualdade.

61. $\int_1^3 \sqrt{x^4 + 1}\,dx \geqslant \dfrac{26}{3}$

62. $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\,dx \leqslant \dfrac{\pi^2}{8}$

63. Demonstre a Propriedade 3 das integrais.

64. Demonstre a Propriedade 6 das integrais.

65. Se f for contínua em $[a, b]$, mostre que

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

[*Sugestão*: $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.]

66. Use o resultado do Exercício 65 para mostrar que

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} 2x\,dx\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

67. Seja $f(x) = 0$ se x for um número racional qualquer e $f(x) = 1$ se x for um número irracional qualquer. Mostre que f não é integrável em $[0, 1]$.

68. Seja $f(0) = 0$ e $f(x) = 1/x$ se $0 < x \leqslant 1$. Mostre que f não é integrável em $[0, 1]$. [*Sugestão*: mostre que o primeiro termo na soma de Riemann, $f(x_i^*)\Delta x$, pode ser tornado arbitrariamente grande.]

69–70 Expresse o limite como uma integral definida.

69. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{i^4}{n^5}$ [*Sugestão*: Considere $f(x) = x^4$.]

70. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1 + (i/n)^2}$

71. Encontre $\int_1^2 x^{-2}\,dx$. *Sugestão*: Escolha x_i^* como a média geométrica de x_{i-1} e x_i (isto é, $x_i^* = \sqrt{x_{i-1}x_i}$) e use a identidade

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

PROJETO DE DESCOBERTA — FUNÇÕES ÁREA

1. (a) Trace a reta $y = 2t + 1$ e use a geometria para achar a área sob essa reta, acima do eixo t, e entre as retas verticais $t = 1$ e $t = 3$.
(b) Se $x > 1$, seja $A(x)$ a área da região que está sob a reta $y = 2t + 1$ entre $t = 1$ e $t = x$. Esboce essa região e use a geometria para achar uma expressão para $A(x)$.
(c) Derive a função área $A(x)$. O que você observa?

2. (a) Se $x \geqslant -1$, seja

$$A(x) = \int_{-1}^{x} (1 + t^2)\,dt$$

$A(x)$ representa a área de uma região. Esboce essa região.

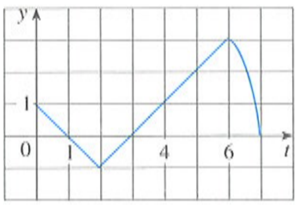
duas partes do Teorema Fundamental do Cálculo mostram que a derivação e a integração são processos inversos. Cada um desfaz o que o outro fez.

O Teorema Fundamental do Cálculo é inquestionavelmente o mais importante do cálculo e realmente é um dos grandes feitos da mente humana. Antes de sua descoberta, desde os tempos de Eudóxio e Arquimedes até os de Galileu e Fermat, os problemas de encontrar áreas, volumes e comprimentos de curva eram tão difíceis que somente um gênio poderia fazer frente ao desafio. Agora, porém, armado com o método sistemático que Leibniz e Newton configuraram a partir do Teorema Fundamental, veremos nos capítulos a seguir que esses problemas desafiadores são acessíveis para todos nós.

5.3 EXERCÍCIOS

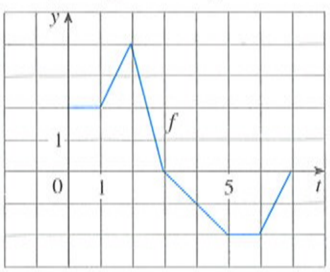
1. Explique claramente o que você entende por "derivação e integração são processos inversos".

2. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ onde f é a função cujo gráfico é mostrado.

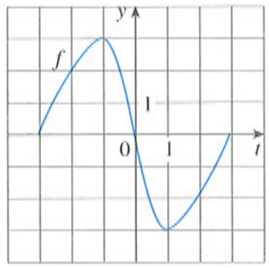


(a) Calcule $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6.
(b) Estime $g(7)$.
(c) Onde g tem um valor máximo? Onde possui um valor mínimo?
(d) Faça um esboço do gráfico de g.

3. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, onde f é a função cujo gráfico está mostrado.
(a) Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ e $g(6)$.
(b) Em que intervalos g está crescendo?
(c) Onde g tem um valor máximo?
(d) Faça um esboço do gráfico de g.



4. Seja $g(x) = \int_{-3}^x f(t)\,dt$, onde f é a função cujo gráfico está mostrado.
(a) Calcule $g(-3)$ e $g(3)$.
(b) Estime $g(-2)$, $g(-1)$ e $g(0)$.
(c) Em que intervalo g está crescendo?
(d) Onde g tem um valor máximo?
(e) Faça um esboço do gráfico de g.
(f) Use o gráfico da parte (e) para esboçar o gráfico de $g'(x)$. Compare com o gráfico de f.



5–6 Esboce a área representada por $g(x)$. A seguir, encontre $g'(x)$ de duas maneiras: (a) utilizando a Parte 1 do Teorema Fundamental e (b) calculando a integral usando a Parte 2 e então derivando.

5. $g(x) = \int_1^x t^2\,dt$

6. $g(x) = \int_0^x (1 + \sqrt{t})\,dt$

7–18 Use a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar a derivada da função.

7. $g(x) = \int_1^x \dfrac{1}{t^3 + 1}$

8. $g(x) = \int_1^x \ln t\,dt$

9. $g(y) = \int_2^y t^2 \operatorname{sen} t\,dt$

10. $g(u) = \int_3^u \dfrac{1}{x + x^2}\,dx$

11. $F(x) = \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\,dt$
$\left[\textit{Sugestão: } \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\,dt = -\int_\pi^x \sqrt{1 + \sec t}\,dt\right]$

12. $G(x) = \int_x^1 \cos \sqrt{t}\,dt$

13. $h(x) = \int_2^{1/x} \operatorname{arctg} t\,dt$

14. $h(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1 + r^3}\,dr$

15. $y = \int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\,dt$

16. $y = \int_1^{\cos x} (1 + v^2)^{10}\,dv$

17. $y = \int_{1-3x}^1 \dfrac{u^3}{1 + u^2}\,du$

18. $y = \int_{e^x}^0 \operatorname{sen}^3 t\,dt$

19–42 Calcule a integral.

19. $\int_{-1}^2 (x^3 - 2x)\,dx$

20. $\int_{-2}^5 6\,dx$

21. $\int_1^4 (5 - 2t - 3t^2)\,dt$

22. $\int_0^1 (1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9)\,du$

23. $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

24. $\int_0^1 x^{3/7}\,dx$

25. $\int_1^2 \dfrac{3}{t^4}\,dt$

26. $\int_\pi^{2\pi} \cos\theta\,d\theta$

27. $\int_0^2 x(2 + x^5)\,dx$

28. $\int_0^1 (3 + x\sqrt{x})\,dx$

29. $\int_1^9 \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\,dx$

30. $\int_0^2 (y - 1)(2y + 1)\,dx$

31. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 t\,dt$

32. $\int_0^{\pi/4} \sec\theta \operatorname{tg}\theta\,d\theta$

33. $\int_1^2 (1 + 2y)^2\,dy$

34. $\int_0^1 \cosh t\,dt$

35. $\int_1^9 \frac{1}{2x}\,dx$

36. $\int_0^1 10^x\,dx$

37. $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{6}{\sqrt{1 - t^2}}\,dt$

38. $\int_0^1 \frac{4}{t^2 + 1}\,dt$

39. $\int_{-1}^1 e^{u+1}\,du$

40. $\int_1^2 \frac{4 + u^2}{u^3}\,du$

41. $\int_0^\pi f(x)\,dx$ onde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \\ \cos x & \text{se } \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

42. $\int_{-2}^2 f(x)\,dx$ onde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 4 - x^2 & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$

43–46 O que está errado na equação?

43. $\int_{-2}^1 x^{-4}\,dx = \left.\frac{x^{-3}}{-3}\right]_{-2}^1 = -\frac{3}{8}$

44. $\int_{-1}^2 \frac{4}{x^3}\,dx = -\left.\frac{2}{x^2}\right]_{-1}^2 = \frac{3}{2}$

45. $\int_{\pi/3}^{\pi} \sec\theta \operatorname{tg}\theta\,d\theta = \sec\theta\Big]_{\pi/3}^{\pi} = -3$

46. $\int_0^\pi \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x\Big]_0^\pi = 0$

47–50 Use um gráfico para dar uma estimativa grosseira da área da região que fica abaixo da curva dada. A seguir, ache a área exata.

47. $y = \sqrt[3]{x}$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 27$

48. $y = x^{-4}$, $\quad 1 \leqslant x \leqslant 6$

49. $y = \operatorname{sen} x$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

50. $y = \sec^2 x$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

51–52 Calcule a integral e interprete-a como uma diferença de áreas. Ilustre com um esboço.

51. $\int_{-1}^2 x^3\,dx$

52. $\int_{\pi/4}^{5\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$

53–56 Ache a derivada da função

53. $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\,du$

$\left[\textit{Sugestão}: \int_{2x}^{3x} f(u)\,du = \int_{2x}^{0} f(u)\,du + \int_0^{3x} f(u)\,du\right]$

54. $g(x) = \int_{\operatorname{tg} x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2 + t^4}}\,dt$

55. $y = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t}\,\operatorname{sen} t\,dt$

56. $y = \int_{\cos x}^{5x} \cos(u^2)\,du$

57. Se $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, onde $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1 + u^4}}{u}\,du$, determine $F''(2)$.

58. Ache o intervalo em que a curva $y = \int_0^x \frac{1}{1 + t + t^2}\,dt$ é côncava para cima.

59. Se $f(1) = 12$, f' é contínua e $\int_1^4 f'(x)\,dx = 17$, qual é o valor de $f(4)$?

60. A **função erro** dada por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

é muito usada em probabilidade, estatística e engenharia.

(a) Mostre que $\int_a^b e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,[\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a)]$.

(b) Mostre que a função $y = e^{x^2}\operatorname{erf}(x)$ satisfaz a equação diferencial $y' = 2xy + 2/\sqrt{\pi}$.

61. A função de Fresnel S foi definida no Exemplo 3, e seus gráficos estão nas Figuras 7 e 8.

(a) Em que valores de x essa função tem valores de máximos locais?

(b) Em que intervalos a função é côncava para cima?

SCA (c) Use um gráfico para resolver a seguinte equação, com precisão de duas casas decimais:

$$\int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt = 0{,}2$$

SCA **62.** A **função seno integral**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

é importante em engenharia elétrica. [O integrando $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ não está definido quando $t = 0$, mas sabemos que seu limite é 1 quando $t \to 0$. Logo, definimos $f(0) = 1$, e isso faz de f uma função contínua em toda parte.]

(a) Trace o gráfico de Si.

(b) Em que valores de x essa função tem valores de máximos locais?

(c) Ache as coordenadas do primeiro ponto de inflexão à direita da origem.

(d) Essa função tem assíntotas horizontais?

(e) Resolva a seguinte equação com precisão de uma casa decimal:

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = 1$$

63–64 Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, onde f é a função cujo gráfico está mostrado.

(a) Em que valores de x ocorrem os valores de máximos e mínimos locais em g?

(b) Onde g atinge seu valor máximo absoluto?

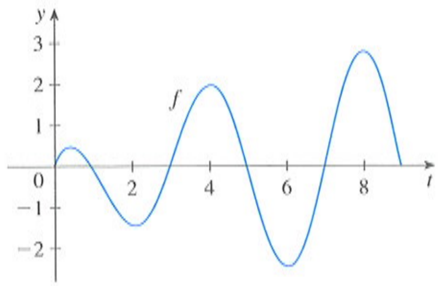
(c) Em que intervalos g é côncavo para baixo?

(d) Esboce o gráfico de g.

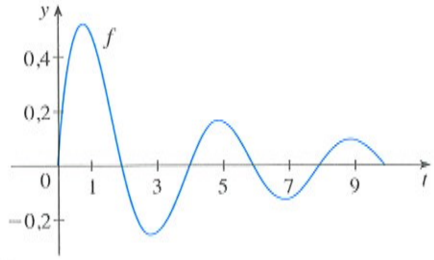
$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $f(x) = x^{3/2}$

$2\sqrt{a} = 6$

63.



64.



65–66 Calcule o limite, reconhecendo primeiro a soma como uma soma de Riemann para uma função definida em $[0, 1]$.

65. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}$

66. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

67. Justifique (3) para o caso $h < 0$.

68. Se f é contínua e g e h são funções deriváveis, encontre uma fórmula para

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

69. (a) Mostre que $1 \leqslant \sqrt{1+x^3} \leqslant 1 + x^3$ para $x \geqslant 0$.
(b) Mostre que $1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \leqslant 1{,}25$.

70. (a) Mostre que $\cos(x^2) \geqslant \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.
(b) Deduza que $\int_0^{\pi/6} \cos(x^2)\,dx \geqslant \frac{1}{2}$.

71. Mostre que

$$0 \leqslant \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\,dx \leqslant 0{,}1$$

comparando o integrando a uma função mais simples

72. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

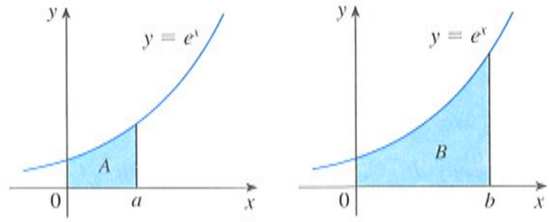
e $\qquad g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

(a) Ache uma expressão para $g(x)$ similar àquela para $f(x)$.
(b) Esboce os gráficos de f e g.
(c) Onde f é derivável? Onde g é derivável?

73. Ache uma função f e um número a tal que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x} \qquad \text{para todo } x > 0.$$

74. A área marcada B é três vezes a área marcada A. Expresse b em termos de a.



75. Uma empresa possui uma máquina que se deprecia a uma taxa contínua $f = f(t)$, onde t é o tempo medido em meses desde seu último recondicionamento. Como a cada vez em que a máquina é recondicionada incorre-se em um custo fixo A, a empresa deseja determinar o tempo ótimo T (em meses) entre os recondicionamentos.

(a) Explique por que $\int_0^t f(s)\,ds$ representa a perda do valor da máquina sobre o período de tempo t desde o último recondicionamento.

(b) Seja $C = C(t)$ dado por

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)\,ds\right]$$

O que representa C e por que a empresa quer minimizar C?

(c) Mostre que C tem um valor mínimo nos números $t = T$ onde $C(T) = f(T)$.

76. Uma companhia de alta tecnologia compra um novo sistema computacional cujo valor inicial é V. O sistema depreciará a uma taxa $f = f(t)$ e acumulará custos de manutenção a uma taxa $g = g(t)$, onde t é o tempo medido em meses. A companhia quer determinar o tempo ótimo para substituir o sistema.

(a) Seja

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]\,ds$$

Mostre que os números críticos de C ocorrem nos números t nos quais $C(t) = f(t) + g(t)$.

(b) Suponha que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & \text{se } 0 < t \leqslant 30 \\ 0 & \text{se } t > 30 \end{cases}$$

e $$g(t) = \frac{Vt^2}{12\,900} \qquad t > 0$$

Determine o período de tempo T para que a depreciação total $D(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ seja igual ao valor inicial V.

(c) Determine o mínimo absoluto de C em $(0, T]$.

(d) Esboce os gráficos de C e $f + g$ no mesmo sistema de coordenadas e verifique o resultado da parte (a) nesse caso.

$$= \frac{61}{6} \approx 10{,}17 \text{ m}$$ □

EXEMPLO 7 A Figura 4 mostra a potência consumida na cidade de Ontário, Canadá, em 9 de dezembro de 2004 (P é medida em megawatts; t é medido em horas a partir da meia-noite). Estime a energia consumida naquele dia.

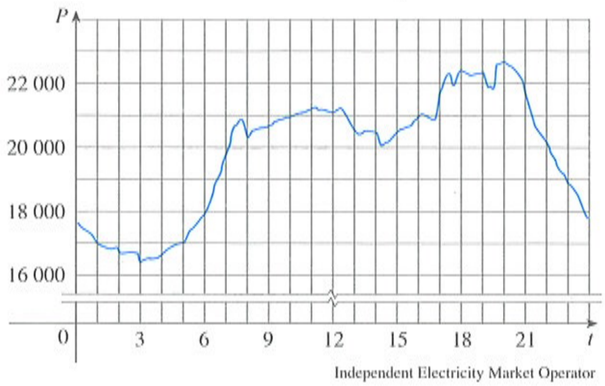


FIGURA 4

SOLUÇÃO A potência é a taxa de variação da energia $P(t) = E'(t)$. Logo, pelo Teorema da Variação Total,

$$\int_0^{24} P(t)\, dt = \int_0^{24} E'(t)\, dt = E(24) - E(0)$$

é a quantidade total de energia consumida naquele dia. Aproximamos o valor da integral utilizando a Regra do Ponto Médio com 12 subintervalos e $\Delta t = 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^{24} P(t)\, dt &\approx [P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)]\Delta t \\ &\approx (16\,900 + 16\,400 + 17\,000 + 19\,800 + 20\,700 + 21\,200 + 20\,500 \\ &\qquad + 20\,500 + 21\,700 + 22\,300 + 21\,700 + 18\,900)(2) \\ &= 475\,200\end{aligned}$$

A energia usada foi aproximadamente $4{,}75 \times 10^5$ megawatts-hora. □

■ Uma observação sobre unidades

Como saber que unidades usar para a energia no Exemplo 7? A integral $\int_0^{24} P(t)\, dt$ é definida como o limite das somas dos termos da forma $P(t_i^*)\Delta t$. Como $P(t_i^*)$ é medida em megawatts e t, em horas, seu produto é medido em megawatts-hora. O mesmo é verdadeiro para o limite. Em geral, a unidade de medida $\int_a^b f(x)\, dx$ é o produto da unidade para $f(x)$ com a unidade para x.

5.4 EXERCÍCIOS

1–4 Verifique, por derivação, que a fórmula está correta.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

2. $\displaystyle\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

3. $\displaystyle\int \cos^3 x\, dx = \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{3b^2}(bx - 2a)\sqrt{a+bx} + C$

5–18 Ache a integral indefinida geral.

5. $\displaystyle\int (x^2 + x^{-2})dx$

6. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$

7. $\displaystyle\int (x^3 + 6x + 1)\, dx$

8. $\displaystyle\int x(1 + 2x^4)\, dx$

9. $\displaystyle\int (1 - t)(2 + t^2)\, dt$

10. $\displaystyle\int v(v^2 + 2)^2\, dx$

11. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x}\, dx$

12. $\displaystyle\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx$

13. $\int (\text{sen } x + \text{senh } x)dx$

14. $\int (\text{cossec}^2 t - 2e^t)\, dt$

15. $\int (\theta - \text{cossec } \theta \text{ cotg } \theta)d\theta$

16. $\int \sec t(\sec t - \text{tg } t)\, dt$

17. $\int (1 + \text{tg}^2\alpha)d\alpha$

18. $\int \dfrac{\text{sen } 2x}{\text{sen } x}\, dx$

19–20 Ache a integral indefinida geral. Ilustre fazendo o gráfico de vários membros da família na mesma tela.

19. $\int (\cos x + \frac{1}{2}x)dx$

20. $\int (e^x - 2x^2)dx$

21–44 Calcule a integral. Todos exceto 40

21. $\int_0^2 (6x^2 - 4x + 5)\, dx$

22. $\int_1^3 (1 + 2x - 4x^3)\, dx$

23. $\int_{-1}^0 (2x - e^x)\, dx$

24. $\int_{-2}^0 (u^5 - u^3 + u^2)\, du$

25. $\int_{-2}^2 (3u + 1)^2\, du$

26. $\int_0^4 (2v + 5)(3v - 1)\, dv$

27. $\int_1^4 \sqrt{t}\,(1 + t)\, dt$

28. $\int_0^9 \sqrt{2t}\, dt$

29. $\int_{-2}^{-1} \left(4y^3 + \dfrac{2}{y^3}\right)dy$

30. $\int_1^2 \dfrac{y + 5y^7}{y^3}\, dy$

31. $\int_0^1 x\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right) dx$

32. $\int_0^5 (2e^x + 4 \cos x)\, dx$

33. $\int_1^4 \sqrt{\dfrac{5}{x}}\, dx$

34. $\int_1^9 \dfrac{3x - 2}{\sqrt{x}}\, dx$

$\dfrac{1 - \text{sen } \theta}{\cos \theta} = \dfrac{\cos \theta}{1 + \text{sen } \theta}$

35. $\int_0^{\pi} (4 \text{ sen } \theta - 3 \cos \theta)\, d\theta$

36. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec \theta - \text{tg } \theta\, d\theta$

37. $\int_0^{\pi/4} \dfrac{1 + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$

38. $\int_0^{\pi/3} \dfrac{\text{sen } \theta + \text{sen } \theta \text{ tg}^2\theta}{\sec^2\theta}\, d\theta$

39. $\int_1^{64} \dfrac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dt$

~~**40.**~~ $\int_{-10}^{10} \dfrac{2e^x}{\text{senh } x + \cosh x} dx$

41. $\int_0^{1/\sqrt{3}} \dfrac{t^2 - 1}{t^4 - 1} dt$

42. $\int_1^2 \dfrac{(x - 1)^3}{x^2}\, dx$

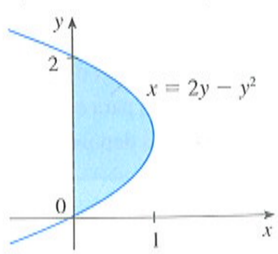
43. $\int_{-1}^2 (x - 2|x|)\, dx$

44. $\int_0^{3\pi/2} |\text{sen } x|\, dx$

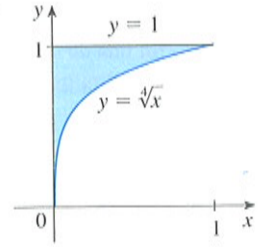
45. Use um gráfico para estimar a intersecção com o eixo x da curva $y = x + x^2 - x^4$. A seguir, use essa informação para estimar a área da região que se situa sob a curva e acima do eixo x.

46. Repita o Exercício 45, para a curva $y = 2x + 3x^4 - 2x^6$.

47. A área da região que está à direita do eixo y e à esquerda da parábola $x = 2y - y^2$ (a região sombreada na figura) é dada pela integral $\int_0^2 (2y - y^2)\, dy$. (Gire sua cabeça no sentido horário e imagine a região como estando abaixo da curva $x = 2y - y^2$ de $y = 0$ até $y = 2$.) Ache a área da região.



48. As fronteiras da região sombreada são o eixo y, a reta $y = 1$ e a curva $y = \sqrt[4]{x}$. Ache a área dessa região escrevendo x como uma função de y e integrando em relação a y (como no Exercício 47).



49. Se $w'(t)$ for a taxa de crescimento de uma criança em quilogramas por ano, o que $\int_0^{10} w'(t)\, dt$ representa?

50. A corrente em um fio elétrico é definida como a derivada da carga: $I(t) = Q'(t)$ (veja o Exemplo 3 da Seção 3.7). O que $\int_a^b I(t)\, dt$ representa?

51. Se vazar óleo de um tanque a uma taxa de $r(t)$ galões por minuto em um instante t, o que $\int_0^{120} r(t)\, dt$ representa?

52. Uma colmeia com uma população inicial de 100 abelhas cresce a uma taxa de $n'(t)$ abelhas por semana. O que $100 + \int_0^{15} n'(t)\, dt$ representa?

53. Na Seção 4.7 definimos a função rendimento marginal $R'(x)$ como a derivada da função rendimento $R(x)$, onde x é o número de unidades vendidas. O que $\int_{1000}^{5000} R'(x)\ dx$ representa?

54. Se $f(x)$ for a inclinação de uma trilha a uma distância de x milhas do começo dela, o que $\int_3^5 f(x)\, dx$ representa?

55. Se x é medido em metros e $f(x)$, em newtons, quais são as unidades de $\int_0^{100} f(x)\, dx$?

56. Se as unidades para x são metros e as unidades para $a(x)$ são quilogramas por metro, quais são as unidades para da/dx? Quais são as unidades para $\int_2^8 a(x)\, dx$?

57–58 A função velocidade (em metros por segundo) é dada para uma partícula movendo-se ao longo de uma reta. Ache (a) o deslocamento e (b) a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo dado.

57. $v(t) = 3t - 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

58. $v(t) = t^2 - 2t - 8, \quad 1 \leqslant t \leqslant 6$

59–60 A função aceleração (em m/s) e a velocidade inicial são dadas para uma partícula movendo-se ao longo de uma reta. Encontre (a) a velocidade no instante t e (b) a distância percorrida durante o intervalo de tempo dado.

59. $a(t) = t + 4, \quad v(0) = 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$

60. $a(t) = 2t + 3, \quad v(0) = -4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

61. A densidade linear de uma barra de comprimento 4 m é dada por $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ medida em quilogramas por metro, em que x é medido em metros a partir de uma extremidade da barra. Ache a massa total da barra.

62. A água escoa pelo fundo de um tanque de armazenamento a uma taxa de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minutos, onde $0 \leqslant t \leqslant 50$. Encontre a quantidade de água que escoa do tanque durante os primeiros dez minutos.

63. A velocidade de um carro foi lida de seu velocímetro em intervalos de 10 segundos e registrada na tabela. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a distância percorrida pelo carro.

t(s)	v(km/h)	t(s)	v(km/h)
0	0	60	90
10	61	70	85
20	83	80	80
30	93	90	75
40	88	100	72
50	82		

64. Suponha que um vulcão esteja em erupção e que as leituras da taxa $r(t)$ com que materiais sólidos são lançados na atmosfera sejam as dadas na tabela. O tempo t é medido em segundos e a unidade para $r(t)$ é toneladas por segundo.

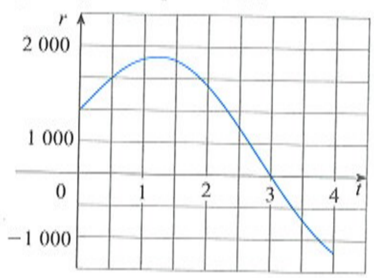
t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	2	10	24	36	46	54	60

(a) Dê estimativas superior e inferior para a quantidade $Q(6)$ do material proveniente da erupção após 6 segundos.

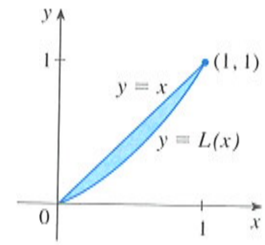
(b) Use a Regra do Ponto Médio para estimar $Q(6)$.

65. O custo marginal de fabricação de x metros de um certo tecido é $C'(x) = 3 - 0{,}01x + 0{,}000006x^2$ (em dólares por metro). Ache o aumento do custo se o nível de produção for elevado de 2 000 para 4 000 metros.

66. Há um fluxo de água para dentro e para fora de um tanque de armazenamento. A seguir, temos um gráfico que mostra a taxa de troca $r(t)$ do volume de água no tanque, em litros por dia. Se a quantidade de água no tanque no instante de tempo $t = 0$ é 25 000 litros, use a Regra do Ponto Médio para estimar a quantidade de água depois de quatro dias.



67. Os economistas usam uma distribuição acumulada chamada *curva de Lorenz* para descrever a distribuição de renda entre as famílias em um dado país. Tipicamente, uma curva de Lorenz é definida no intervalo [0, 1], tem extremidades (0, 0) e (1, 1) e é contínua, crescente e côncava para cima. Os pontos sobre essa curva são determinados classificando-se todas as famílias pela renda e então calculando a porcentagem de famílias cuja renda é menor ou igual a uma porcentagem dada da renda total do país. Por exemplo, o ponto $(a/100, b/100)$ está sobre a curva de Lorenz se $a\%$ de famílias recebe menos do que ou igual a $b\%$ da renda total. A *igualdade absoluta* da distribuição de renda ocorreria se a parte mais baixa $a\%$ das famílias recebesse $a\%$ da renda e, nesse caso, a curva de Lorenz seria a reta $y = x$. A área entre a curva de Lorenz e a reta $y = x$ mede quanto a distribuição de renda difere da igualdade absoluta. O *coeficiente de desigualdade* é a razão da área entre a curva de Lorenz e a reta $y = x$ para a área sob $y = x$.



(a) Mostre que o coeficiente de desigualdade é o dobro da área entre a curva de Lorenz e a reta $y = x$, isto é, mostre que o

$$\text{coeficiente de desigualdade} = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

(b) A distribuição de renda para um certo país está representada pela curva de Lorenz definida pela equação

$$L(x) = \tfrac{5}{12}x^2 + \tfrac{7}{12}x$$

Qual é a porcentagem da renda total recebida pelas 50% das famílias que recebem menos? Encontre o coeficiente de desigualdade.

68. Em 7 de maio de 1992 o ônibus espacial *Endeavour* foi lançado na missão STS-49, cujo propósito era instalar uma peça nova em um satélite de comunicação do INTELSAT. A tabela dá os dados da velocidade para o ônibus entre o lançamento e a entrada em ação dos foguetes auxiliares.

Evento	Tempo (s)	Velocidade (m/s)
Lançamento	0	0
Começo da manobra de inclinação	10	56,4
Fim da manobra de inclinação	15	97,2
Regulador de pressão a 89%	20	136,2
Regulador de pressão a 67%	32	226,2
Regulador de pressão a 104%	59	403,9
Pressão dinâmica máxima	62	440,4
Separação dos foguetes auxiliares	125	1 265,2

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para modelar esses dados por um polinômio de terceiro grau.

(b) Use o modelo da parte (a) para estimar a altura atingida pela *Endeavour* 125 segundos depois do lançamento.

e assim sendo a Equação 8 fica

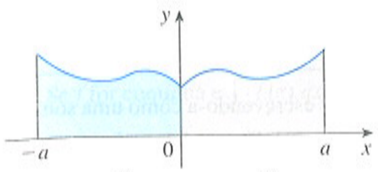
$$\boxed{9} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-u)du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(a) Se f for par, então $f(-u) = f(u)$; logo, da Equação 9 segue que

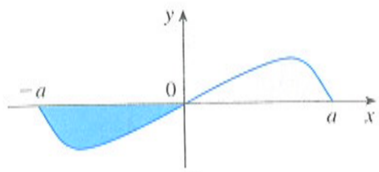
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(b) Se f for ímpar, então $f(-u) = -f(u)$, e a Equação 9 nos dá que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$



(a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$



(b) f ímpar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

FIGURA 4

O Teorema 7 está ilustrado na Figura 4. Quando f é positiva e par, a parte (a) diz que a área sob $y = f(x)$ de $-a$ até a é o dobro da área de 0 até a em virtude da simetria. Lembre-se de que uma integral $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser expressa como a área acima do eixo x e abaixo de $y = f(x)$ menos a área abaixo do eixo x e acima da curva. Assim, a parte (b) diz que a integral é 0, pois as áreas se cancelam.

EXEMPLO 10 Uma vez que $f(x) = x^6 + 1$ satisfaz $f(-x) = f(x)$, ela é par, e portanto

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx = 2\int_{0}^{2} (x^6 + 1)\,dx$$

$$= 2\left[\tfrac{1}{7}x^7 + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7} \qquad \square$$

EXEMPLO 11 Já que $f(x) = (\text{tg}\,x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisfaz $f(-x) = -f(x)$, ela é ímpar, e por conseguinte

$$\int_{-1}^{1} \frac{\text{tg}\,x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0 \qquad \square$$

5.5 EXERCÍCIOS

1–6 Calcule a integral fazendo a substituição dada.

1. $\int \cos 3x\,dx, \quad u = 3x$

2. $\int x(4 + x^2)^{10}\,dx, \quad u = 4 + x^2$

3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$

4. $\int \dfrac{dt}{(1 - 6t)^4}, \quad u = 1 - 6t$

5. $\int \dfrac{4}{(1 + 2x)^3}\,dx, \quad u = 1 + 2x$

6. $\int e^{\text{sen}\,\theta} \cos\theta\,d\theta, \quad u = \text{sen}\,\theta$

7–46 Calcule a integral indefinida.

7. $\int x\,\text{sen}(x^2)\,dx$

8. $\int x^2(x^3 + 5)^9\,dx$

9. $\int (3x - 2)^{20}\,dx$

10. $\int (3t + 2)^{2,4}\,dt$

11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2}\,dx$

12. $\int \dfrac{x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

13. $\int \dfrac{dx}{5 - 3x}$

14. $\int e^x\,\text{sen}(e^x)\,dx$

15. $\int \text{sen}\,\pi t\,dt$

16. $\int \dfrac{x}{x^2 + 1}\,dx$

17. $\int \dfrac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}}\,dx$

18. $\int \sec 2\theta\,\text{tg}\,2\theta\,d\theta$

19. $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

20. $\int \dfrac{dx}{ax + b} \quad (a \neq 0)$

21. $\int \dfrac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

22. $\int \sqrt{x}\,\text{sen}(1 + x^{3/2})\,dx$

23. $\int \cos\theta\,\text{sen}^6\theta\,d\theta$

24. $\int (1 + \text{tg}\,\theta)^5 \sec^2\theta x\,d\theta$

25. $\int e^x\sqrt{1 + e^x}\,dx$

26. $\int e^{\cos t}\,\text{sen}\,t\,dt$

27. $\displaystyle\int \frac{z^2}{\sqrt[3]{1+z^3}}\,dz$

28. $\displaystyle\int \frac{\text{tg}^{-1}x}{1+x^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int e^{\text{tg}\,x}\sec^2 x\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

33. $\displaystyle\int \sqrt{\text{cotg}\,x}\,\text{cossec}^2 x\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\,2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\,x}{1+\cos^2 x}\,dx$

37. $\displaystyle\int \text{cotg}\,x\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1+\text{tg}\,t}}$

39. $\displaystyle\int \sec^3 x\,\text{tg}\,x\,dx$

40. $\displaystyle\int \text{sen}\,t\sec^2(\cos t)\,dt$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\text{sen}^{-1}x}$

42. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+2}}\,dx$

46. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

47–50 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável fazendo um gráfico da função e de sua primitiva (tome $C = 0$).

47. $\displaystyle\int x(x^2-1)^3\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

49. $\displaystyle\int \text{sen}^3 x\cos x\,dx$

50. $\displaystyle\int \text{tg}^2\theta\sec^2\theta\,d\theta$

51–70 Calcule a integral definida.

51. $\displaystyle\int_0^2 (x-1)^{25}\,dx$

52. $\displaystyle\int_0^7 \sqrt{4+3x}\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$

54. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx$

55. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)\,dt$

56. $\displaystyle\int_{1/6}^{1/2} \text{cossec}\,\pi t\,\text{cotg}\,\pi t\,dt$

57. $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \text{tg}^3\theta\,d\theta$

58. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$

59. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

60. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2\,\text{sen}\,x}{1+x^6}\,dx$

61. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}$

62. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,\text{sen}(\text{sen}\,x)\,dx$

63. $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{x^2+a^2}\,dx \quad (a>0)$

64. $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

65. $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$

66. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$

67. $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{\sqrt{\ln x}}$

68. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\text{sen}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

69. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^z+1}{e^z+z}\,dz$

70. $\displaystyle\int_0^{T/2} \text{sen}(2\pi t/T-\alpha)\,dt$

71–72 Use um gráfico para dar uma estimativa da área da região que está sob a curva dada. A seguir, encontre a área exata.

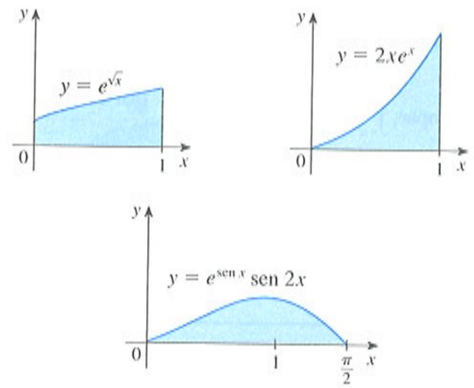
71. $y=\sqrt{2x+1},\quad 0\leqslant x\leqslant 1$

72. $y=2\,\text{sen}\,x-\text{sen}\,2x,\quad 0\leqslant x\leqslant \pi$

73. Calcule $\int_{-2}^{2}(x+3)\sqrt{4-x^2}\,dx$ escrevendo-a como uma soma de duas integrais e interpretando uma dessas integrais em termos de uma área.

74. Calcule $\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}\,dx$ fazendo uma substituição e interpretando a integral resultante em termos de uma área.

75. Quais das seguintes áreas são iguais? Por quê?



76. Um modelo para a taxa de metabolismo basal, em kcal/h, de um homem jovem é $R(t)=85-0{,}18\cos(\pi t/12)$, em que t é o tempo em horas medido a partir de 5 horas da manhã. Qual é o metabolismo basal total deste homem, $\int_0^{24}R(t)\,dt$, em um período de 24 horas?

77. Um tanque de armazenamento de petróleo sofre uma ruptura em $t=0$ e o petróleo vaza do tanque a uma taxa de $r(t)=100e^{-0{,}01t}$ litros por minuto. Quanto petróleo vazou na primeira hora?

78. Uma população de bactérias tem inicialmente 400 bactérias e cresce a uma taxa de $r(t)=(450\,268)e^{1{,}12567t}$ bactérias por hora. Quantas bactérias existirão após 3 horas?

79. A respiração é cíclica, um ciclo completo que começa pela inalação e acaba pela exalação, durando cerca de 5 s. A taxa máxima do fluxo de ar para dentro dos pulmões é de cerca de 0,5 L/s. Isso explica, em parte, por que a função $f(t)=\frac{1}{2}\,\text{sen}(2\pi t/5)$ tem sido frequentemente usada para modelar a taxa de fluxo de ar para dentro dos pulmões. Use esse modelo para encontrar o volume de ar inalado nos pulmões no instante t.

80. A Alabama Instruments Company preparou uma linha de montagem para fabricar uma nova calculadora. A taxa de produção dessas calculadoras após t semanas é

$$\frac{dx}{dt} = 5\,000\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right) \text{ calculadoras/semana}$$

(Observe que a produção tende a 5 000 por semana à medida que passa o tempo, mas a produção inicial é baixa, pois os trabalhadores não estão familiarizados com as novas técnicas.) Ache o número de calculadoras produzidas do começo da terceira semana até o fim da quarta semana.

81. Se f for contínua e $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$, encontre $\int_0^2 f(2x)\,dx$.

82. Se f for contínua e $\int_0^9 f(x)\,dx = 4$, encontre $\int_0^3 xf(x^2)\,dx$.

83. Se f for contínua em $\mathbb{R}$, demonstre que

$$\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$$

Para o caso onde $f(x) \geqslant 0$ e $0 < a < b$, faça um diagrama para interpretar geometricamente essa equação como uma igualdade de áreas.

84. Se f for contínua em $\mathbb{R}$, demonstre que

$$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$$

Para o caso onde $f(x) \geqslant 0$, faça um diagrama para interpretar geometricamente essa equação como uma igualdade de áreas.

85. Se a e b forem números positivos, mostre que

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\,dx$$

86. Se f é contínua em $[0, \pi]$, use a substituição $u = \pi - x$ para demonstrar que

$$\int_0^\pi xf(\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\,dx$$

87. Use o Exercício 86 para calcular a integral

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\,dx$$

88. (a) Se f é contínua, mostre que

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x)\,dx$$

(b) Use a parte (a) para calcular $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$ e $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx$.

5 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. (a) Escreva uma expressão para uma soma de Riemann de uma função f. Explique o significado da notação que você usar.
   (b) Se $f(x) \geqslant 0$, qual a interpretação geométrica de uma soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.
   (c) Se $f(x)$ assumir valores positivos e negativos, qual a interpretação geométrica de uma soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

2. (a) Escreva a definição de integral definida de uma função contínua de a até b.
   (b) Qual a interpretação geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ se $f(x) \geqslant 0$?
   (c) Qual a interpretação geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ se $f(x)$ assumir valores positivos e negativos? Ilustre com um diagrama.

3. Enuncie ambas as partes do Teorema Fundamental do Cálculo.

4. (a) Enuncie o Teorema da Variação Total.
   (b) Se $r(t)$ for a taxa segundo a qual a água escoa para dentro de um reservatório, o que representa $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\,dt$?

5. Suponha que uma partícula mova-se para a frente e para trás ao longo de uma linha reta com velocidade $v(t)$, medida em metros por segundo, com aceleração $a(t)$.
   (a) Qual o significado de $\int_{60}^{120} v(t)\,dt$?
   (b) Qual o significado de $\int_{60}^{120} |v(t)|\,dt$?
   (c) Qual o significado de $\int_{60}^{120} a(t)\,dt$?

6. (a) Explique o significado da integral indefinida $\int f(x)\,dx$.
   (b) Qual a conexão entre a integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ e a integral indefinida $\int f(x)\,dx$?

7. Explique exatamente o significado da afirmação "derivação e integração são processos inversos".

8. Enuncie a Regra da Substituição. Na prática, como fazer uso dela?

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se f e g forem contínuas em $[a, b]$, então
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

2. Se f e g forem contínuas em $[a, b]$, então
$$\int_a^b [f(x)g(x)]\, dx = \left(\int_a^b f(x)\, dx\right)\left(\int_a^b g(x)\, dx\right)$$

3. Se f for contínua em $[a, b]$, então
$$\int_a^b 5f(x)\, dx = 5\int_a^b f(x)\, dx$$

4. Se f for contínua em $[a, b]$, então
$$\int_a^b x f(x)\, dx = x\int_a^b f(x)\, dx$$

5. Se f' for contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geqslant 0$, então
$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\, dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\, dx}$$

6. Se f for contínua em $[1, 3]$, então $\int_1^3 f'(v)\, dv = f(3) - f(1)$.

7. Se f e g forem contínuas e $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, então
$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant \int_a^b g(x)\, dx$$

8. Se f e g forem diferenciáveis e $f(x) \geqslant g(x)$ para $a < x < b$, então $f'(x) \geqslant g'(x)$ para $a < x < b$

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^5 - 6x^9 + \frac{\operatorname{sen} x}{(1 + x^4)^2}\right) dx = 0$

10. $\displaystyle\int_{-5}^{5} (ax^2 + bx + c)\, dx = 2\int_0^5 (ax^2 + c)\, dx$

11. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^4}\, dx = -\frac{3}{8}$

12. $\int_0^2 (x - x^3)\, dx$ representa a área sob a curva $y = x - x^3$ de 0 até 2.

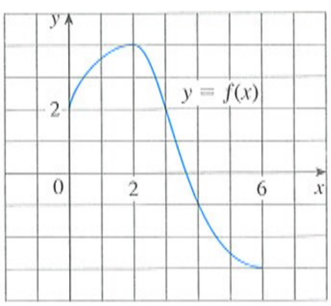
13. Todas as funções contínuas têm derivadas.

14. Todas as funções contínuas têm primitivas.

15. Se f for contínua em $[a, b]$, então
$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)\, dx\right) = f(x)$$

EXERCÍCIOS

1. Use o gráfico dado de f para encontrar a soma de Riemann com seis subintervalos. Tome como pontos amostrais (a) as extremidades esquerdas e (b) os pontos médios. Em cada caso faça um diagrama e explique o que representa a soma de Riemann.



2. (a) Calcule a soma de Riemann para
$$f(x) = x^2 - x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$
com quatro subintervalos, tomando como pontos amostrais as extremidades direitas. Explique, com a ajuda de um diagrama, o que representa a soma de Riemann.
(b) Use a definição de integral definida (com as extremidades direitas) para calcular o valor da integral
$$\int_0^2 (x^2 - x)\, dx$$
(c) Use o Teorema Fundamental para verificar sua resposta da parte (b).
(d) Faça um diagrama para explicar o significado geométrico da integral na parte (b).

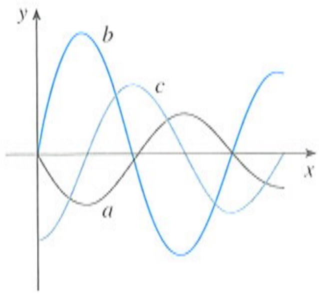
3. Calcule
$$\int_0^1 (x + \sqrt{1 - x^2})dx$$
interpretando-a em termos de áreas.

4. Expresse
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} x_i\, \Delta x$$
como uma integral definida no intervalo $[0, \pi]$ e então calcule a integral.

5. Se $\int_0^6 f(x)\, dx = 10$ e $\int_0^4 f(x)\, dx = 7$, ache $\int_4^6 f(x)\, dx$.

SCA 6. (a) Escreva $\int_1^5 (x + 2x^5)\, dx$ como o limite das somas de Riemann tomando como pontos amostrais as extremidades direitas. Use um SCA para calcular a soma e o limite.
(b) Use o Teorema Fundamental para verificar sua resposta da parte (a).

7. A figura a seguir mostra os gráficos de f, f' e $\int_0^x f(t)\, dt$. Identifique cada gráfico e explique suas escolhas.



8. Calcule:

(a) $\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right)dx$ (b) $\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\operatorname{arctg} x}\,dx$

(c) $\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\operatorname{arctg} t}\,dt$

9–38 Calcule, se existir, a integral.

9. $\int_1^2 (8x^3 + 3x^2)\,dx$

10. $\int_0^T (x^4 - 8x + 7)\,dx$

11. $\int_0^1 (1 - x^9)\,dx$

12. $\int_0^1 (1 - x^9)dx$

13. $\int_1^9 \frac{\sqrt{u} - 2u^2}{u}\,du$

14. $\int_0^1 (\sqrt[4]{u} + 1)^2\,du$

15. $\int_0^1 y(y^2 + 1)^5\,dy$

16. $\int_0^2 y^2\sqrt{1 + y^3}\,dy$

17. $\int_1^5 \frac{dt}{(t - 4)^2}$

18. $\int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi t)\,dt$

19. $\int_0^1 v^2\cos(v^3)\,dv$

20. $\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\,dx$

21. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{t^4 \operatorname{tg} t}{2 + \cos t}\,dt$

22. $\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$

23. $\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$

24. $\int_1^{10} \frac{x}{x^2 - 4}\,dx$

25. $\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\,dx$

26. $\int \frac{\operatorname{cossec}^2 x}{1 + \operatorname{cotg} x}\,dx$

27. $\int \operatorname{sen} \pi t \cos \pi t\,dt$

28. $\int \operatorname{sen} x \cos(\cos x)\,dx$

29. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

30. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\int \operatorname{tg} x \ln(\cos x)\,dx$

32. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$

33. $\int \frac{x^3}{1 + x^4}\,dx$

34. $\int \operatorname{senh}(1 + 4x)\,dx$

35. $\int \frac{\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{1 + \sec\theta}\,d\theta$

36. $\int_0^{\pi/4} (1 + \operatorname{tg} t)^3 \sec^2 t\,dt$

37. $\int_0^3 |x^2 - 4|\,dx$

38. $\int_0^4 |\sqrt{x} - 1|\,dx$

39–40 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique que sua resposta é razoável fazendo o gráfico da função e de sua primitiva (tome $C = 0$).

39. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\,dx$

40. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

41. Use um gráfico para dar uma estimativa da área da região que está sob a curva $y = x\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Encontre a seguir a área exata.

42. Faça o gráfico da função $f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$ e use-o para conjecturar o valor da integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. Calcule então a integral para confirmar sua conjectura.

43–48 Encontre a derivada da função.

43. $F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1 + t^3}\,dt$

44. $F(x) = \int_x^1 \sqrt{t + \operatorname{sen} t}\,dt$

45. $g(x) = \int_0^{x^4} \cos(t^2)dt$

46. $g(x) = \int_1^{\operatorname{sen} x} \frac{1 - t^2}{1 + t^4}\,dt$

47. $y = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$

48. $y = \int_{2x}^{3x+1} \operatorname{sen}(t^4)\,dt$

49–50 Use a Propriedade 8 das integrais para estimar o valor da integral.

49. $\int_1^3 \sqrt{x^2 + 3}\,dx$

50. $\int_3^5 \frac{1}{x + 1}\,dx$

51–54 Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade.

51. $\int_0^1 x^2 \cos x\,dx \leqslant \frac{1}{3}$

52. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

53. $\int_0^1 e^x \cos x\, dx \leqslant e - 1$ **54.** $\int_0^1 x \operatorname{sen}^{-1} x\, dx \leqslant \pi/4$

55. Use a Regra do Ponto Médio com $n = 6$ para aproximar $\int_0^3 \operatorname{sen}(x^3)dx$.

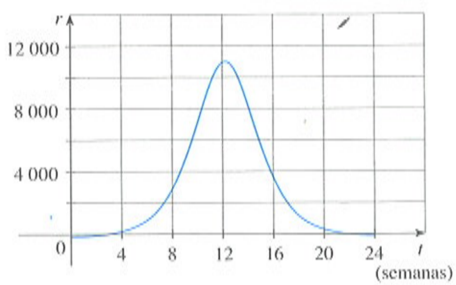
56. Uma partícula move-se ao longo de uma reta com uma função velocidade $v(t) = t^2 - t$, onde v é medida em metros por segundo. Ache (a) o deslocamento e (b) a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo $[0, 5]$.

57. Seja $r(t)$ a taxa do consumo mundial de petróleo em que t é medido em anos começando em $t = 0$ em 1º de janeiro de 2000 e $r(t)$ é medida em barris por ano. O que representa $\int_0^8 r(t)\, dt$?

58. Um radar foi usado para registrar a velocidade de um corredor nos instantes dados na tabela. Use a Regra do Ponto Médio para estimar a distância percorrida pelo corredor durante aqueles 5 segundos.

t (s)	v (ms)	t (s)	v (ms)
0	0	3,0	10,51
0,5	4,67	3,5	10,67
1,0	7,34	4,0	10,76
1,5	8,86	4,5	10,81
2,0	9,73	5,0	10,81
2,5	10,22		

59. Uma população de abelhas cresce a uma taxa de $r(t)$ abelhas por semana e o gráfico de r é mostrado a seguir. Use a Regra do Ponto Médio com seis subintervalos para estimar o crescimento na população de abelhas durante as primeiras 24 semanas.



60. Seja

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Calcule $\int_{-3}^1 f(x)\, dx$ interpretando a integral como uma diferença de áreas.

61. Se f for contínua e $\int_0^2 f(x)\, dx = 6$, calcule $\int_0^{\pi/2} f(2 \operatorname{sen} \theta) \cos \theta\, d\theta$.

62. A função de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi t^2)\, dt$ foi introduzida na Seção 5.3. Fresnel também usou a função

$$C(x) = \int_0^x \cos(\tfrac{1}{2}\pi t^2)\, dt$$

em sua teoria da difração das ondas de luz.

(a) Em quais intervalos C é crescente?

(b) Em quais intervalos C é côncava para cima?

SCA (c) Use um gráfico para resolver a seguinte equação, com precisão de duas casas decimais:

$$\int_0^x \cos(\tfrac{1}{2}\pi t^2)\, dt = 0{,}7$$

SCA (d) Desenhe os gráficos de C e S na mesma tela. Como estão relacionados esses gráficos?

63. Estime o valor do número c tal que a área sob a curva $y = \operatorname{senh} cx$ entre $x = 0$ e $x = 1$ seja igual a 1.

64. Suponha que a temperatura em uma barra longa e fina colocada sobre o eixo x seja inicialmente $C/(2a)$ se $|x| \leqslant a$ e 0 se $|x| > a$. Pode ser mostrado que se a difusividade do calor da barra for k, então sua temperatura em um ponto x no instante t é

$$T(x, t) = \frac{C}{a\sqrt{4\pi kt}} \int_0^a e^{-(x-u)^2/(4kt)}\, du$$

Para achar a distribuição de temperatura que resulta de uma área quente concentrada inicialmente na origem, precisamos calcular

$$\lim_{a \to 0} T(x, t)$$

Use a Regra de L'Hôspital para encontrar esse limite.

65. Se f for uma função contínua tal que

$$\int_0^x f(t)\, dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$$

para todo x, ache uma fórmula explícita para $f(x)$.

66. Suponha que h seja uma função tal que $h(1) = -2$, $h'(1) = 2$, $h''(1) = 3$, $h(2) = 6$, $h'(2) = 5$, $h''(2) = 13$, e h'' seja contínua em toda a parte. Calcule $\int_1^2 h''(u)\, du$.

67. Se f for contínua em $[a, b]$, mostre que

$$2\int_a^b f(x) f'(x)\, dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$$

68. Encontre $\lim_{h \to 0} \dfrac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1 + t^3}\, dt$.

69. Se f for contínua em $[0, 1]$, demonstre que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(1 - x)\, dx$$

70. Calcule

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{2}{n}\right)^9 + \left(\frac{3}{n}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^9\right]$$

71. Suponha que f seja contínua, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) > 0$ e $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{3}$. Encontre o valor da integral $\int_0^1 f^{-1}(y)\, dy$.

$$= 3\,F'(3) = 3\,\frac{\text{sen } 3}{3} \qquad \text{(TFC1)}$$

$$= \text{sen } 3 \qquad \square$$

PROBLEMAS

1. Se $x \text{ sen } \pi x = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$, onde f é uma função contínua, ache $f(4)$.

2. Encontre o valor mínimo da área da região sob a curva $y = x + 1/x$ de $x = a$ a $x = a + 1{,}5$, para todo $a > 0$.

3. Se f for uma função derivável tal que $f(x)$ nunca seja 0 e $\int_0^x f(t)\,dt = [f(x)]^2$ para todo x, encontre f.

4. (a) Faça os gráficos de vários membros da família de funções $f(x) = (2cx - x^2)/c^3$ para $c > 0$ e analise as regiões entre essas curvas e o eixo x. Como estão relacionadas as áreas dessas regiões?

(b) Demonstre sua conjectura em (a).

(c) Examine novamente os gráficos da parte (a) e use-os para esboçar a curva traçada pelos vértices (pontos mais altos) da família de funções. Você pode imaginar que tipo de curva ela é?

(d) Ache a equação da curva que você esboçou na parte (c).

5. Se $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1 + t^3}}\,dt$, em que $g(x) = \int_0^{\cos x} [1 + \text{sen}(t^2)]\,dt$, encontre $f'(\pi/2)$.

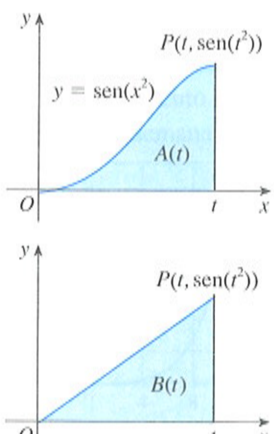


FIGURA PARA O PROBLEMA 8

6. Se $f(x) = \int_0^x x^2 \text{ sen } (t^2)\,dt$, encontre $f'(x)$.

7. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 - \tan 2t)^{1/t}\,dt$.

8. A figura mostra duas regiões no primeiro quadrante: $A(t)$ é a área sob a curva $y = \text{sen}(x^2)$ de 0 até t e $B(t)$ é a área do triângulo com vértices O, P e $(t, 0)$. Ache $\lim\limits_{t \to 0^+} A(t)/B(t)$.

9. Encontre o intervalo $[a, b]$ para o qual o valor da integral $\int_a^b (2 + x - x^2)\,dx$ é um máximo.

10. Use uma integral para estimar a soma $\sum_{i=1}^{10\,000} \sqrt{i}$. → (v. ao lado)

11. (a) Calcule $\int_0^n [\![x]\!]\,dx$, onde n é um inteiro positivo.

(b) Calcule $\int_a^b [\![x]\!]\,dx$, onde a e b são números reais com $0 \leqslant a < b$.

12. Encontre $\frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \left(\int_1^{\text{sen } t} \sqrt{1 + u^4}\,du \right) dt$.

13. Suponha que os coeficientes do polinômio cúbico $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ satisfaçam a equação

$$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = 0$$

Mostre que a equação $P(x) = 0$ tem uma raiz entre 0 e 1. Você consegue generalizar este resultado para um polinômio de grau n?

14. Um disco circular de raio r é usado em um evaporador e deve girar em um plano vertical. Ele deve ficar parcialmente submerso no líquido de tal forma a maximizar a área molhada exposta do disco. Mostre que o centro do disco deve estar posicionado a uma altura $r/\sqrt{1 + \pi^2}$ acima da superfície do líquido.

15. Demonstre que se f for contínua, então $\int_0^x f(u)(x - u)\,du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt \right) du$.

16. A figura mostra uma região formada por todos os pontos dentro de um quadrado que estão mais próximos de seu centro que de seus lados. Ache a área dessa região.

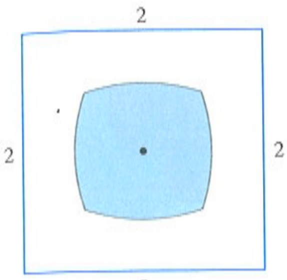


FIGURA PARA O PROBLEMA 16

17. Calcule $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} \right)$.

18. Para um número c qualquer, seja $f_c(x)$ o menor dentre os dois números $(x - c)^2$ e $(x - c - 2)^2$. Definimos então $g(c) = \int_0^1 f_c(x)\,dx$. Ache os valores máximo e mínimo de $g(c)$ se $-2 \leqslant c \leqslant 2$.

$$0 < \frac{2}{3} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}}{(n+1)^{3/2}} < \frac{1}{n+1}.$$

$$\boxed{0 < \frac{2}{3} - \frac{\sum_{i=1}^{10000} \sqrt{i}}{(10001)^{3/2}} < \frac{1}{10001} < 10^{-4}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i}{n}}$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i}{n}}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$$

$$\frac{1}{(n+1)^{3/2}} S_n - \frac{2}{3} < \frac{S_n + 1}{(n+1)^{3/2}(n+1)}$$

$$\frac{2}{3}(n+1)^{3/2} - \sqrt{n+1} < S_n < \frac{2}{3}(n+1)^{3/2}$$

$$1 - \frac{3/2}{n+1} < \frac{S_n}{\frac{2}{3}(n+1)^{3/2}} < 1$$