3.1 EXERCÍCIOS

1. (a) Como o número e está definido?

(b) Use uma calculadora para estimar os valores dos limites

$$\lim_{h \to 0} \frac{2{,}7^h - 1}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0} \frac{2{,}8^h - 1}{h}$$

corretos até a segunda casa decimal. O que você pode concluir sobre o valor de e?

2. (a) Esboce, à mão, o gráfico da função $f(x) = e^x$, prestando particular atenção em como o gráfico cruza o eixo y. Que fato lhe permite fazer isso?

(b) Que tipos de funções são $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^e$? Compare as fórmulas de derivação para f e g.

(c) Qual das funções da parte (b) cresce mais rapidamente quando x é muito grande?

3–32 Derive a função.

3. $f(x) = 186{,}5$

4. $f(x) = \sqrt{30}$

5. $f(x) = 5x - 1$

6. $F(x) = -4x^{10}$

7. $f(x) = x^3 - 4x + 6$

8. $f(t) = \frac{1}{2}t^6 - 3t^4 + t$

9. $f(t) = \frac{1}{4}(t^4 + 8)$

10. $h(x) = (x - 2)(2x + 3)$

11. $y = x^{-2/5}$

12. $y = 5e^x + 3$

13. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

14. $R(t) = 5t^{-3/5}$

15. $Y(t) = 6t^{-9}$

16. $R(x) = \dfrac{\sqrt{10}}{x^7}$

17. $G(x) = \sqrt{x} - 2e^x$

18. $y = \sqrt[3]{x}$

19. $F(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^5$

20. $f(t) = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

21. $y = ax^2 + bx + c$

22. $y = \sqrt{x}\,(x - 1)$

23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

24. $y = \dfrac{x^2 - 2\sqrt{x}}{x}$

25. $y = 4\pi^2$

26. $g(u) = \sqrt{2}\,u + \sqrt{3u}$

27. $H(x) = (x + x^{-1})^3$

28. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

29. $u = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$

30. $v = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$

32. $y = e^{x+1} + 1$

33–34 Encontre uma equação para a reta tangente à curva no ponto dado.

33. $y = \sqrt[4]{x}$, $(1, 1)$

34. $y = x^4 + 2x^2 - x$, $(1, 2)$

35–36 Encontre equações para a reta tangente e para a reta normal à curva no ponto dado.

35. $y = x^4 + 2e^x$, $(0, 2)$

36. $y = (1 + 2x)^2$, $(1, 9)$

37–38 Encontre uma equação para a reta tangente à curva no ponto dado. Ilustre com o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

37. $y = 3x^2 - x^3$, $(1, 2)$

38. $y = x - \sqrt{x}$, $(1, 0)$

39–42 Ache $f'(x)$. Compare os gráficos de f e f' e use-os para explicar por que sua resposta é razoável.

39. $f(x) = e^x - 5x$

40. $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 50x$

41. $f(x) = 3x^{15} - 5x^3 + 3$

42. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

43. (a) Use uma calculadora gráfica ou computador para fazer o gráfico da função $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$ em uma janela retangular $[-3, 5]$ por $[-10, 50]$.

(b) Usando o gráfico da parte (a) para estimar as inclinações, faça um esboço, à mão, do gráfico de f' (veja o Exemplo 1 da Seção 2.8).

(c) Calcule $f'(x)$ e use essa expressão, com uma ferramenta gráfica, para fazer o gráfico de f'. Compare com seu esboço da parte (b).

44. (a) Use uma calculadora gráfica ou computador para fazer o gráfico da função $g(x) = e^x - 3x^2$ na janela retangular $[-1, 4]$ por $[-8, 8]$.

(b) Usando o gráfico da parte (a) para estimar a inclinação, faça um esboço, à mão, do gráfico de g' (veja o Exemplo 1 da Seção 2.8).

(c) Calcule $g'(x)$ e use essa expressão, com uma ferramenta gráfica, para fazer o gráfico de g'. Compare com seu esboço da parte (b).

45–46 Encontre a primeira e a segunda derivadas da função.

45. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 16x$

46. $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

47–48 Encontre a primeira e a segunda derivadas da função. Verifique se suas respostas são razoáveis comparando os gráficos de f, f' e f''.

47. $f(x) = 2x - 5x^{3/4}$

48. $f(x) = e^x - x^3$

49. A equação de movimento de uma partícula é $s = t^3 - 3t$, em que s está em metros e t em segundos. Encontre

(a) a velocidade e a aceleração como funções de t,

(b) a aceleração depois de 2 s e

(c) a aceleração quando a velocidade for 0.

50. A equação de movimento de uma partícula é $s = 2t^3 - 7t^2 + 4t + 1$, em que s está em metros e t em segundos.

(a) Encontre a velocidade e a aceleração como funções de t.

(b) Encontre a aceleração depois de 1 s.

(c) Trace o gráfico das funções posição, velocidade e aceleração na mesma tela.

51. Ache os pontos sobre a curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ onde a tangente é horizontal.

52. Quais são os valores de x para os quais o gráfico $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$ tem tangentes horizontais?

53. Mostre que a curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ não tem reta tangente com a inclinação 4.

54. Encontre uma equação para a reta tangente à curva $y = x\sqrt{x}$ que seja paralela à reta $y = 1 + 3x$.

55. Encontre equações para ambas as retas que são tangentes à curva $y = 1 + x^3$ e que são paralelas à reta $12x - y = 1$.

56. Em qual ponto sobre a curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ a reta tangente é paralela à reta $3x - y = 5$? Ilustre fazendo o gráfico da curva e de ambas as retas.

57. Encontre uma equação para a reta normal à parábola $y = x^2 - 5x + 4$ que seja paralela à reta $x - 3y = 5$.

58. Onde a reta normal à parábola $y = x - x^2$ no ponto $(1, 0)$ intercepta a parábola uma segunda vez? Ilustre com um esboço.

59. Trace um diagrama para mostrar que há duas retas tangentes à parábola $y = x^2$ que passam pelo ponto $(0, -4)$. Encontre as coordenadas dos pontos onde essas retas tangentes interceptam a parábola.

60. (a) Ache as equações de ambas as retas que passam pelo ponto $(2, -3)$ e que são tangentes à parábola $y = x^2 + x$.

(b) Mostre que não existe nenhuma reta que passe pelo ponto $(2, 7)$ e que seja tangente à parábola. A seguir, desenhe um diagrama para ver por quê.

61. Use a definição de derivada para mostrar que se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$. (Isso demonstra a Regra da Potência para o caso onde $n = -1$.)

62. Encontre a n-ésima derivada de cada função calculando algumas das primeiras derivadas e observando o padrão que ocorre.

(a) $f(x) = x^n$ (b) $f(x) = 1/x$

63. Encontre um polinômio de segundo grau P tal que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ e $P''(2) = 2$.

64. A equação $y'' + y' - 2y = x^2$ é chamada equação diferencial, pois envolve uma função desconhecida y e suas derivadas y' e y''. Encontre constantes A, B e C tais que a função $y = Ax^2 + Bx + C$ satisfaça a equação. (As equações diferenciais serão estudadas no Capítulo 9, no Volume II.)

65. Encontre uma função cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujo gráfico tenha tangentes horizontais nos pontos $(-2, 6)$ e $(2, 0)$.

66. Encontre uma parábola com a equação $y = ax^2 + bx + c$ que tenha inclinação 4 em $x = 1$, inclinação -8 em $x = -1$ e passe pelo ponto $(2, 15)$.

67. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

f é derivável em 1? Esboce os gráficos de f e f'.

68. Em quais números a seguinte função g é derivável?

$$g(x) = \begin{cases} -1 - 2x & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Dê uma fórmula para g' e esboce os gráficos de g e g'.

69. (a) Para quais valores de x a função $f(x) = |x^2 - 9|$ é derivável? Ache uma fórmula para f'.

(b) Esboce os gráficos de f e f'.

70. Onde a função $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$ é derivável? Dê uma fórmula para h' e esboce os gráficos de h e h'.

71. Encontre a parábola com equação $y = ax^2 + bx$ cuja reta tangente em $(1, 1)$ tem equação $y = 3x - 2$.

72. Suponha que a curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenha uma reta tangente com equação $y = 2x + 1$ quando $x = 0$ e uma reta tangente com equação $y = 2 - 3x$ quando $x = 1$. Encontre os valores de a, b, c e d.

73. Para quais valores de a e b a reta $2x + y = b$ é tangente à parábola $y = ax^2$ quando $x = 2$?

74. Encontre o valor de c tal que a reta $y = \frac{3}{2}x + 6$ seja tangente à curva $y = c\sqrt{x}$.

75. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 2 \\ mx + b & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Encontre os valores de m e b que tornem f derivável em toda a parte.

76. Uma reta tangente à hipérbole $xy = c$ é traçada em um ponto P.

(a) Mostre que o ponto médio do segmento de reta cortado dessa reta tangente pelos eixos coordenados é P.

(b) Mostre que o triângulo formado pela reta tangente e pelos eixos coordenados sempre têm a mesma área, não importa onde P esteja localizado sobre a hipérbole.

77. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^{1000} - 1}{x - 1}$.

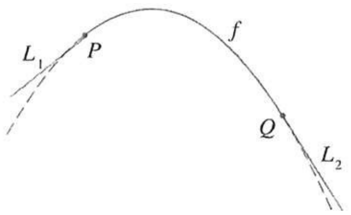
78. Trace um diagrama ilustrando duas retas perpendiculares que se interceptam sobre o eixo y, ambas tangentes à parábola $y = x^2$. Onde essas retas se interceptam?

79. Se $c > \frac{1}{2}$, quantas retas pelo ponto $(0, c)$ são normais à parábola $y = x^2$? E se $c \leq \frac{1}{2}$?

80. Esboce as parábolas $y = x^2$ e $y = x^2 - 2x + 2$. Você acha que existe uma reta que seja tangente a ambas as curvas? Em caso afirmativo, encontre sua equação. Em caso negativo, explique por que não.

PROJETO APLICADO — CONSTRUINDO UMA MONTANHA-RUSSA MELHOR

Suponha que lhe peçam para projetar a primeira subida e descida de uma montanha-russa. Estudando fotografias de suas montanhas-russas favoritas, você decide fazer a subida com inclinação 0,8 e a descida com inclinação $-1{,}6$. Você decide ligar estes dois trechos retos $y = L_1(x)$ e $y = L_2(x)$ com parte de uma parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, em que x e $f(x)$ são medidos em metros. Para o percurso ser liso, não pode haver variações bruscas na direção, de modo que você quer que os segmentos L_1 e L_2 sejam tangentes à parábola nos pontos de intersecção P e Q. (Veja a figura.) Para simplificar as equações, você decide colocar a origem em P.



1. (a) Suponha que a distância horizontal entre P e Q seja 30 m. Escreva equações para a, b e c que garantam que o percurso seja liso nos pontos de transição.
(b) Resolva as equações da parte (a) para a, b e c para encontrar uma fórmula para $f(x)$.
(c) Trace L_1, f e L_2 para verificar graficamente que as transições são lisas.
(d) Encontre a diferença de elevação entre P e Q.

2. A solução do Problema 1 pode parecer lisa, mas poderia não provocar a sensação de lisa, pois a função definida por partes [que consiste de $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 30$, e $L_2(x)$ para $x > 30$] não tem uma segunda derivada contínua. Assim, você decide melhorar seu projeto, usando uma função quadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ apenas no intervalo $3 \leqslant x \leqslant 27$ e conectando-a às funções lineares por meio de duas funções cúbicas:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \qquad 0 \leqslant x < 3$$

$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \qquad 27 < x \leqslant 30$$

(a) Escreva um sistema de equações em 11 incógnitas que garanta que as funções e suas primeiras duas derivadas coincidam nos pontos de transição.
SCA (b) Resolva as equações da parte (a) com um sistema de computação algébrica para encontrar fórmulas para $q(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.
(c) Trace L_1, g, q, h e L_2, e compare com o gráfico do Problema 1(c).

3.2 AS REGRAS DO PRODUTO E DO QUOCIENTE

As fórmulas desta seção nos permitem derivar novas funções formadas a partir das antigas funções por multiplicação ou divisão.

A REGRA DO PRODUTO

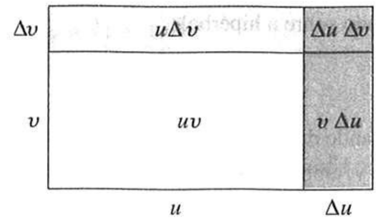


FIGURA 1
Geometria da Regra do Produto

Por analogia com as Regras da Soma e da Diferença, alguém poderia tentar conjecturar, como Leibniz o fez três séculos atrás, que a derivada de um produto é o produto da derivada. Contudo, podemos ver que esta conjectura está errada examinando um exemplo particular. Seja $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$. Então a Regra da Potência fornece $f'(x) = 1$ e $g'(x) = 2x$. Mas $(fg)(x) = x^3$, assim $(fg)'(x) = 3x^2$. Dessa forma, $(fg)' \neq f'g'$. A fórmula correta foi descoberta por Leibniz (logo depois de tentar a fórmula falsa) e é chamada Regra do Produto.

Antes de enunciar a Regra do Produto, vamos ver como poderíamos descobri-la. No caso onde $u = f(x)$ e $v = g(x)$ são funções positivas, podemos interpretar o produto uv como uma área de um retângulo (veja a Figura 1). Se x variar uma quantidade Δx, temos que as variações correspondentes em u e v são

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

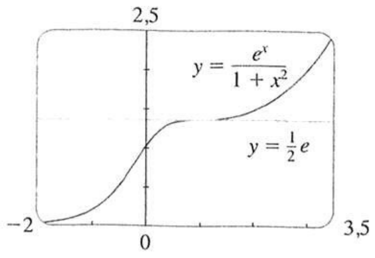


FIGURA 4

EXEMPLO 5 Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = e^x/(1 + x^2)$ no ponto $(1, \frac{1}{2}e)$.

SOLUÇÃO Segundo a Regra do Quociente, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x^2)\dfrac{d}{dx}(e^x) - e^x \dfrac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2)e^x - e^x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2}$$

Logo, a inclinação da reta tangente em $(1, \frac{1}{2}e)$ é

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

Isso significa que a reta tangente em $(1, \frac{1}{2}e)$ é horizontal, e sua equação é $y = \frac{1}{2}e$. [Veja a Figura 4. Observe que a função está crescendo e cruza sua reta tangente em $(1, \frac{1}{2}e)$.] □

OBS. Não use a Regra do Quociente *toda vez* que você vir um quociente. Algumas vezes é mais fácil reescrever um quociente primeiro, colocando-o em uma forma que seja mais simples para derivar. Por exemplo, embora seja possível derivar a função

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

usando a Regra do Quociente, é muito mais fácil efetuar primeiro a divisão e escrever a função como

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

antes de derivar.

A seguir está um resumo das regras de derivação que aprendemos até agora:

TABELA DAS REGRAS DE DERIVAÇÃO

$\dfrac{d}{dx}(c) = 0$	$\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$(cf)' = cf'$	$(f + g)' = f' + g'$	$(f - g)' = f' - g'$
$(fg)' = fg' + gf'$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{gf' - fg'}{g^2}$	

3.2 EXERCÍCIOS

1. Encontre a derivada de $y = (x^2 + 1)(x^3 + 1)$ de duas maneiras: usando a Regra do Produto e fazendo primeiro a multiplicação. As respostas são iguais?

2. Encontre a derivada da função

$$F(x) = \frac{x - 3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

de duas maneiras: usando a Regra do Quociente e simplificando antes. Mostre que suas respostas são equivalentes. Qual método você prefere?

3–26 Derive.

3. $f(x) = x^2e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$

7. $g(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$

8. $f(t) = \dfrac{2t}{4+t^2}$

9. $V(x) = (2x^3+3)(x^4-2x)$

10. $Y(u) = (u^{-2}+u^{-3})(u^5-2u^2)$

11. $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y+5y^3)$

12. $R(t) = (t+e^t)(3-\sqrt{t})$

13. $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$

14. $y = \dfrac{x+1}{x^3+x-2}$

15. $y = \dfrac{t^2}{3t^2-2t+1}$

16. $y = \dfrac{t^3+t}{t^4-2}$

17. $y = (r^2-2r)e^r$

18. $y = \dfrac{1}{s+ke^s}$

19. $y = \dfrac{v^3-2v\sqrt{v}}{v}$

20. $z = w^{3/2}(w+ce^w)$

21. $f(t) = \dfrac{2t}{2+\sqrt{t}}$

22. $g(t) = \dfrac{t-\sqrt{t}}{t^{1/3}}$

23. $f(x) = \dfrac{A}{B+Ce^x}$

24. $f(x) = \dfrac{1-xe^x}{x+e^x}$

25. $f(x) = \dfrac{x}{x+\dfrac{c}{x}}$

26. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

27–30 Encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.

27. $f(x) = x^4e^x$

28. $f(x) = x^{5/2}e^x$

29. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+2x}$

30. $f(x) = \dfrac{x}{3+e^x}$

31–32 Encontre uma equação da reta tangente à curva dada no ponto especificado.

31. $y = \dfrac{2x}{x+1}$, $(1, 1)$

32. $y = \dfrac{e^x}{x}$, $(1, e)$

33–34 Encontre equações da reta tangente e da reta normal à curva dada no ponto especificado.

33. $y = 2xe^x$, $(0, 0)$

34. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, $(4, 0{,}4)$

35. (a) A curva $y = 1/(1+x^2)$ é chamada **bruxa de Maria Agnesi**. Encontre uma equação da reta tangente para essa curva no ponto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

36. (a) A curva $y = x(1+x^2)$ é denominada **serpentina**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(3, 0{,}3)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e a reta tangente na mesma tela.

37. (a) Se $f(x) = e^x/x^3$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique que sua resposta da parte (a) é razoável comparando os gráficos de f e f'.

38. (a) Se $f(x) = x/(x^2-1)$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique que sua resposta da parte (a) é razoável comparando os gráficos de f e f'.

39. (a) Se $f(x) = (x-1)e^x$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.
(b) Verifique se suas respostas na parte (a) são razoáveis comparando os gráficos de f, f' e f''.

40. (a) Se $f(x) = x/(x^2+1)$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.
(b) Verifique se suas respostas na parte (a) são razoáveis comparando os gráficos de f, f' e f''.

41. Se $f(x) = x^2/(1+x)$, encontre $f''(1)$.

42. Se $g(x) = x/e^x$, encontre $g^{(n)}(x)$.

43. Suponha que $f(5) = 1, f'(5) = 6, g(5) = -3$ e $g'(5) = 2$. Encontre os valores de
(a) $(fg)'(5)$ (b) $(f/g)'(5)$
(c) $(g/f)'(5)$.

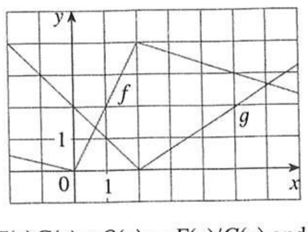
44. Suponha que $f(2) = -3, g(2) = 4, f'(2) = -2$ e $g'(2) = 7$. Encontre $h'(2)$.
(a) $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$ (b) $h(x) = f(x)g(x)$
(c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (d) $h(x) = \dfrac{g(x)}{1+f(x)}$

45. Se $f(x) = e^xg(x)$, onde $g(0) = 2$ e $g'(0) = 5$, encontre $f'(0)$.

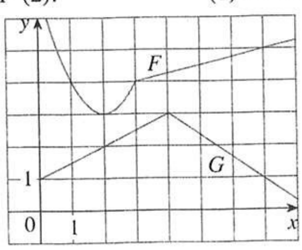
46. Se $h(2) = 4$ e $h'(2) = -3$, encontre

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}$$

47. Se f e g forem funções cujos gráficos estão ilustrados, seja $u(x) = f(x)g(x)$ e $v(x) = f(x)/g(x)$.
(a) Encontre $u'(1)$. (b) Encontre $v'(5)$.



48. Seja $P(x) = F(x)G(x)$ e $Q(x) = F(x)/G(x)$ onde F e G são as funções cujos gráficos estão representados a seguir.
(a) Encontre $P'(2)$. (b) Encontre $Q'(7)$.



49. Se g é uma função derivável, encontre uma expressão para a derivada de cada uma das seguintes funções.

(a) $y = xg(x)$ (b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$ (c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$

50. Se f for uma função derivável, encontre uma expressão para a derivada de cada uma das seguintes funções:

(a) $y = x^2 f(x)$ (b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$

(c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ (d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

51. Quantas retas tangentes à curva $y = x/(x + 1)$ passam pelo ponto $(1, 2)$? Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?

52. Encontre as equações de retas tangentes à curva

$$y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

paralelas à reta $x - 2y = 2$.

53. Neste exercício, estimaremos a taxa segundo a qual a renda pessoal total está subindo na área metropolitana da cidade de Richmond-Petersburg, Virgínia. Em julho de 1999, a população dessa área era de 961 400, e estava crescendo aproximadamente em 9 200 pessoas por ano. O rendimento anual médio era de \$ 30 593 *per capita*, e essa média crescia em torno de \$ 1 400 por ano (bem acima da média nacional, de cerca de \$ 1 225 anuais). Use a Regra do Produto e os dados aqui fornecidos para estimar a taxa segundo a qual a renda pessoal total estava crescendo na cidade em julho de 1999. Explique o significado de cada termo na Regra do Produto.

54. Um fabricante produz peças de tecido com tamanho fixo. A quantidade q de cada peça de tecido (medida em metros) vendida é uma função do preço p (em dólares por metro); logo, podemos escrever $q = f(p)$. Então, a receita total conseguido com o preço de venda p é $R(p) = pf(p)$.
(a) O que significa dizer que $f(20) = 10\,000$ e $f'(20) = -350$?
(b) Tomando os valores da parte (a), encontre $R'(20)$ e interprete sua resposta.

55. (a) Use duas vezes a Regra do Produto para demonstrar que se f, g e h forem diferenciáveis, então $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.
(b) Fazendo $f = g = h$ na parte (a), mostre que

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x)$$

(c) Use a parte (b) para derivar $y = e^{3x}$.

56. (a) Se $F(x) = f(x)g(x)$, onde f e g têm derivadas de todas as ordens, mostre que $F'' = f''g + 2f'g' + fg''$.
(b) Encontre fórmulas análogas para F''' e $F^{(4)}$.
(c) Faça uma conjectura para uma fórmula de $F^{(n)}$.

57. Encontre expressões para as primeiras cinco derivadas de $f(x) = x^2 e^x$. Você percebe um padrão nestas expressões? Conjecture uma fórmula para $f^{(n)}(x)$ e demonstre-a usando indução matemática.

58. (a) Se g for derivável, a **Regra do Recíproco** afirma que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Use a Regra do Quociente para demonstrar a Regra do Recíproco.
(b) Use a Regra do Recíproco para derivar a função do Exercício 18.
(c) Use a Regra do Recíproco para verificar que a Regra da Potência é válida para os inteiros negativos, isto é,

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

para todo inteiro positivo n.

3.3 DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

▪ Uma revisão das funções trigonométricas é dada no Apêndice D.

Antes de começar esta seção, talvez você precise revisar as funções trigonométricas. Em particular, é importante lembrar-se de que quando falamos sobre a função f definida para todo o número real x por

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

deve ser entendido que sen x significa o seno do ângulo cuja medida em *radianos* é x. Uma convenção análoga é verdadeira para as outras funções trigonométricas, cos, tg, cossec, sec e cotg. Lembre-se, da Seção 2.5, de que todas as funções trigonométricas são contínuas em todo número em seus domínios.

Se esboçarmos o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ e usarmos a interpretação de $f'(x)$ como a inclinação da tangente à curva do seno a fim de esboçar o gráfico de f' (veja o Exercício 14 da Seção 2.8), isso dará a impressão de que o gráfico de f' pode ser igual à curva do cosseno (veja a Figura 1).

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \cos x}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$= \frac{\cos 0}{1} \qquad \text{(pela continuidade do cosseno e pela Equação 2)}$$

$$= 1$$

3.3 EXERCÍCIOS

1–16 Derive.

1. $f(x) = x - 3 \operatorname{sen} x$

2. $f(x) = x \operatorname{sen} x$

3. $y = \operatorname{sen} x + 10 \operatorname{tg} x$

4. $y = 2 \operatorname{cossec} x + 5 \cos x$

5. $g(t) = t^3 \cos t$

6. $g(t) = 4 \sec t + \operatorname{tg} t$

7. $h(\theta) = \operatorname{cossec} \theta + e^\theta \operatorname{cotg} \theta$

8. $y = e^u(\cos u + cu)$

9. $y = \dfrac{x}{2 - \operatorname{tg} x}$

10. $y = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$

11. $f(\theta) = \dfrac{\sec \theta}{1 + \sec \theta}$

12. $y = \dfrac{1 - \sec x}{\operatorname{tg} x}$

13. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

14. $y = \operatorname{cossec} \theta\, (\theta + \operatorname{cotg} \theta)$

15. $f(x) = xe^x \operatorname{cossec} x$

16. $y = x^2 \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x$

17. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$.

18. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$.

19. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cossec}^2 x$.

20. Demonstre, pela definição de derivada, que se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

21–24 Encontre uma equação da reta tangente à curva dada no ponto especificado.

21. $y = \sec x,\quad (\pi/3, 2)$

22. $y = e^x \cos x,\quad (0, 1)$

23. $y = x + \cos x,\quad (0, 1)$

24. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x},\quad (0, 1)$

25. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 2x \operatorname{sen} x$ no ponto $(\pi/2, \pi)$.

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

26. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = \sec x - 2 \cos x$ no ponto $(\pi/3, 1)$.

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

27. (a) Se $f(x) = \sec x - x$, encontre $f'(x)$.

(b) Verifique que sua resposta para a parte (a) é razoável fazendo os gráficos de f e f' para $|x| < \pi/2$.

28. (a) Se $f(x) = e^x \cos x$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.

(b) Verifique que sua resposta para a parte (a) é razoável fazendo os gráficos de f, f' e f''.

29. Se $H(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$, encontre $H'(\theta)$ e $H''(\theta)$.

30. Se $f(x) = \sec x$, encontre $f''(\pi/4)$.

31. (a) Use a Regra do Quociente para derivar a função

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$$

(b) Simplifique a expressão para $f(x)$, escrevendo-a em termos de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, e, então, encontre $f'(x)$.

(c) Mostre que suas respostas para as partes (a) e (b) são equivalentes.

32. Suponha que $f(\pi/3) = 4$, e $f'(\pi/3) = -2$, e faça

$$g(x) = f(x) \operatorname{sen} x$$

e

$$h(x) = \frac{\cos x}{f(x)}$$

Encontre (a) $g'(\pi/3)$ e (b) $h'(\pi/3)$.

33. Que valores de x fazem com que o gráfico de $f(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$ tenha uma reta tangente horizontal?

34. Encontre os pontos sobre a curva $y = (\cos x)/(2 + \operatorname{sen} x)$ na qual a tangente é horizontal.

35. Um corpo em uma mola vibra horizontalmente sobre uma superfície lisa (veja a figura). Sua equação de movimento é $x(t) = 8 \operatorname{sen} t$, onde t está em segundos e x, em centímetros.

(a) Encontre a velocidade e aceleração no instante t.

(b) Encontre a posição, velocidade e aceleração do corpo no instante $t = 2\pi/3$. Em que sentido ele está se movendo nesse instante?

36. Uma faixa elástica é pendurada em um gancho e um corpo está preso na extremidade inferior da faixa. Quando o corpo é puxado para baixo e então solto, ele vibra verticalmente. A equação do movimento é $s = 2\cos t + 3\,\text{sen}\,t$, $t \geqslant 0$, onde s é medido em centímetros e t, em segundos. (Consideramos o sentido positivo como para baixo.)

(a) Encontre a velocidade e a aceleração no instante t.

(b) Faça os gráficos das funções velocidade e aceleração.

(c) Quando o corpo passa pela posição de equilíbrio pela primeira vez?

(d) A que distância da posição de equilíbrio o corpo chega?

(e) Quando a velocidade é máxima?

37. Uma escada com 6 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Seja θ o ângulo entre o topo da escada e a parede, e x a distância da base da escada até a parede. Se a base da escada escorregar para longe da parede, com que rapidez x variará em relação a θ quando $\theta = \pi/3$?

38. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu m g}{\mu\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta}$$

onde μ é uma constante chamada *coeficiente de atrito*.

(a) Encontre a taxa de variação de F em relação a θ.

(b) Quando essa taxa de variação é igual a 0?

(c) Se $m = 20$ kg, t $= 9{,}8\text{m/s}^2$ e $\mu = 0{,}6$, faça o gráfico de F como uma função de θ e use-o para localizar o valor de θ para o qual $dF/d\theta = 0$. Esse valor é consistente com a resposta dada na parte (b)?

39–48 Encontre o limite.

39. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,3x}{x}$

40. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,4x}{\text{sen}\,6x}$

41. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\text{tg}\,6t}{\text{sen}\,2t}$

42. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\text{sen}\,\theta}$

43. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}(\cos\theta)}{\sec\theta}$

44. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\text{sen}^2\,3t}{t^2}$

45. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta + \text{tg}\,\theta}$

46. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(x^2)}{x}$

47. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{1 - \text{tg}\,x}{\text{sen}\,x - \cos x}$

48. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}\,(x-1)}{x^2 + x - 2}$

49. Derive cada identidade trigonométrica para obter uma nova identidade (ou uma familiar).

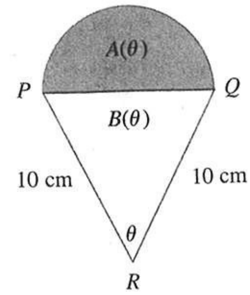
(a) $\text{tg}\,x = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}$

(b) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

(c) $\sec x + \cos x = \dfrac{1 + \text{cotg}\,x}{\text{cossec}\,x}$

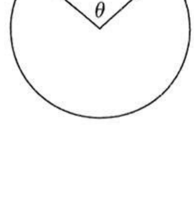
50. O semicírculo com diâmetro PQ está sobre um triângulo isósceles PQR para formar uma região com um formato de sorvete, conforme mostra a figura. Se $A(\theta)$ for a área do semicírculo e $B(\theta)$ a área do triângulo, encontre

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



51. A figura mostra um arco de círculo com comprimento s e uma corda com comprimento d, ambos subentendidos por um ângulo central θ. Encontre

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{s}{d}$$



Quando $\Delta x \to 0$, a Equação 8 mostra que $\Delta u \to 0$. Assim, $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Portanto,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

$$= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

Isso demonstra a Regra da Cadeia. □

3.4 EXERCÍCIOS

1–6 Escreva a função composta na forma $f(g(x))$. [Identifique a função de dentro $u = g(x)$ e a de fora $y = f(u)$.] Então, encontre a derivada dy/dx.

1. $y = \operatorname{sen} 4x$ **2.** $y = \sqrt{4 + 3x}$

3. $y = (1 - x^2)^{10}$ **4.** $y = \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$ **6.** $y = \operatorname{sen}(e^x)$

7–46 Encontre a derivada da função.

7. $F(x) = (x^3 + 4x)^7$ **8.** $F(x) = (x^2 - x + 1)^3$

9. $F(x) = \sqrt[4]{1 + 2x + x^3}$ **10.** $f(x) = (1 + x^4)^{2/3}$

11. $g(t) = \dfrac{1}{(t^4 + 1)^3}$ **12.** $f(t) = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} t}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$ **14.** $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $y = xe^{-kx}$ **16.** $y = 3\cot(n\theta)$

17. $g(x) = (1 + 4x)^5(3 + x - x^2)^8$

18. $h(t) = (t^4 - 1)^3(t^3 + 1)^4$

19. $y = (2x - 5)^4(8x^2 - 5)^{-3}$ **20.** $y = (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 2}$

21. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$ **22.** $y = e^{-5x}\cos 3x$

23. $y = e^{x\cos x}$ **24.** $y = 10^{1 - x^2}$

25. $F(z) = \sqrt{\dfrac{z - 1}{z + 1}}$ **26.** $G(y) = \dfrac{(y - 1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$

27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$ **28.** $y = \dfrac{e^{2u}}{e^u + e^{-u}}$

29. $y = \operatorname{tg}(\cos x)$ **30.** $G(y) = \left(\dfrac{y^2}{y + 1}\right)^5$

31. $y = 2^{\operatorname{sen} \pi x}$ **32.** $y = \operatorname{tg}^2(3\theta)$

33. $y = \sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x$ **34.** $y = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

35. $y = \cos\left(\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right)$ **36.** $F(z) = \sqrt{\dfrac{t}{t^2 + 4}}$

37. $y = \operatorname{cotg}^2(\operatorname{sen} \theta)$ **38.** $y = e^{k \operatorname{tg} \sqrt{x}}$

39. $f(t) = \operatorname{tg}(e^t) + e^{\operatorname{tg} t}$ **40.** $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

41. $f(t) = \operatorname{sen}^2(e^{\operatorname{sen}^2 t})$ **42.** $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

43. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$ **44.** $y = 2^{3^{x^2}}$

45. $y = \cos\sqrt{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} \pi x)}$ **46.** $y = [x + (x + \operatorname{sen}^2 x)^3]^4$

47–50 Encontre a primeira e a segunda derivadas da função.

47. $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ **48.** $y = xe^{cx}$

49. $y = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ **50.** $y = e^{e^x}$

51–54 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

51. $y = \dfrac{8}{\sqrt{4 + 3x}}$, $(4, 2)$ **52.** $y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$, $(\pi/6, 1)$

53. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $(\pi, 0)$ **54.** $y = x^2 e^{-x}$, $(1, 1/e)$

55. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 2/(1 + e^{-x})$ no ponto $(0, 1)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

56. (a) A curva $y = |x|/\sqrt{2 - x^2}$ é chamada *curva ponta de bala*. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, 1)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

57. (a) Se $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta em (a) é razoável comparando os gráficos de f e f'.

58. A função $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, aparece em aplicações a síntese de modulação de frequência (FM).
(a) Use uma calculadora gráfica para esboçar um gráfico da f e use esse gráfico para dar um esboço, mesmo que grosseiro, do gráfico de f'.
(b) Calcule $f'(x)$ e, utilizando uma calculadora gráfica, use a expressão de f' para obter seu gráfico. Compare com o obtido no item (a).

59. Encontre todos os pontos sobre o gráfico da função $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$ nos quais a reta tangente é horizontal.

60. Encontre as coordenadas x de todos os pontos sobre a curva $y = \text{sen } 2x - 2 \text{ sen } x$ nos quais a reta tangente é horizontal.

61. Se $F(x) = f(g(x))$, onde $f(-2) = 8, f'(-2) = 4, f'(5) = 3$, $g(5) = -2$, e $g'(5) = 6$, encontre $F'(5)$.

62. Se $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$, onde $f(1) = 7$ e $f'(1) = 4$, encontre $h'(1)$.

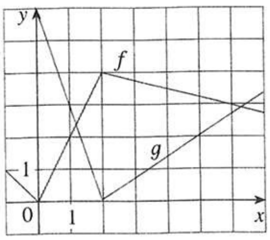
63. É dada uma tabela de valores para f, g, f' e g'.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

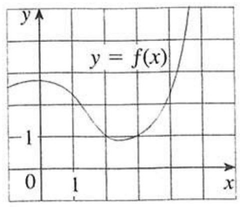
(a) Se $h(x) = f(g(x))$, encontre $h'(1)$.
(b) Se $H(x) = g(f(x))$, encontre $H'(1)$.

64. Sejam f e g as funções do Exercício 63.
(a) Se $F(x) = f(f(x))$, encontre $F'(2)$.
(b) Se $G(x) = g(g(x))$, encontre $G'(3)$.

65. Se f e g forem as funções cujos gráficos estão mostrados, seja $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ e $w(x) = g(g(x))$. Encontre cada derivada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.
(a) $u'(1)$ (b) $v'(1)$ (c) $w'(1)$



66. Se f for a função cujo gráfico está mostrado, seja $h(x) = f(f(x))$ e $g(x) = f(x^2)$. Use o gráfico de f para estimar o valor de cada uma das derivadas.
(a) $h'(2)$ (b) $g'(2)$



67. Suponha que f seja derivável em $\mathbb{R}$. Seja $F(x) = f(e^x)$ e $G(x) = e^{f(x)}$. Encontre as expressões para (a) $F'(x)$ e (b) $G'(x)$.

68. Suponha que f seja derivável em $\mathbb{R}$ e seja α um número real. Seja $F(x) = f(x^\alpha)$ e $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encontre as expressões para (a) $F'(x)$ e (b) $G'(x)$.

69. Seja $r(x) = f(g(h(x)))$ onde $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ e $f'(3) = 6$. Encontre $r'(1)$.

70. Se g for uma função duas vezes derivável e $f(x) = xg(x^2)$, encontre f'' em termos de g, g' e g''.

71. Se $F(x) = f(3f(4f(x)))$, onde $f(0) = 0$ e $f'(0) = 2$, encontre $F'(0)$.

72. Se $F(x) = f(xf(xf(x)))$, onde $f(1) = 2, f(2) = 3, f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$ e $f'(3) = 6$, encontre $F'(1)$.

73. Mostre que a função $y = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ satisfaz a equação diferencial $y'' + 2y' + y = 0$.

74. Para quais valores de r a função $y = e^{rx}$ satisfaz a equação $y'' + 5y' - 6y = 0$?

75. Encontre a 50ª derivada de $y = \cos 2x$.

76. Encontre a 1 000ª derivada de $f(x) = xe^{-x}$.

77. O deslocamento de uma partícula em uma corda vibrante é dado pela equação

$$s(t) = 10 + \tfrac{1}{4} \text{ sen } (10\pi t)$$

onde s é medido em centímetros e t, em segundos. Encontre a velocidade da partícula após t segundos.

78. Se a equação de movimento de uma partícula for dada por $s = A \cos(\omega t + \delta)$, dizemos que a partícula está em *movimento harmônico simples*.
(a) Encontre a velocidade da partícula no instante t.
(b) Quando a velocidade é zero?

79. A Cefeu é uma constelação cujo brilho é variável. A estrela mais visível dessa constelação é a Delta Cefeu, para a qual o intervalo de tempo entre os brilhos máximos é de 5,4 dias. O brilho médio dessa estrela é de 4,0, com uma variação de $\pm 0{,}35$. Em vista desses dados, o brilho de Delta Cefeu no instante t, onde t é medido em dias, foi modelado pela função

$$B(t) = 4{,}0 + 0{,}35 \text{ sen}\left(\frac{2\pi t}{5{,}4}\right)$$

(a) Encontre a taxa de variação do brilho após t dias.
(b) Encontre, correta até duas casas decimais, a taxa de crescimento após 1 dia.

80. No Exemplo 4 da Seção 1.3 chegamos a um modelo para a duração da luz do dia (em horas) em Ancara, Turquia, no t-ésimo dia do ano:

$$L(t) = 12 + 2{,}8 \text{ sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Use esse modelo para comparar como o número de horas de luz do dia aumenta em Ancara em 21 de março e em 21 de maio.

81. O movimento de uma mola sujeita a uma força de atrito ou a uma força de amortecimento (tal como o amortecedor em um carro) é frequentemente modelado pelo produto de uma função exponencial e uma função seno ou cosseno. Suponha que a equação de movimento de um ponto nessa mola seja

$$s(t) = 2e^{-1{,}5t} \text{ sen } 2\pi t$$

onde s é medida em centímetros e t, em segundos. Encontre a velocidade após t segundos e faça o gráfico das funções posição e velocidade para $0 \leqslant t \leqslant 2$.

82. Sob certas circunstâncias, um boato se propaga de acordo com a equação

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

onde $p(t)$ é a proporção da população que já ouviu o boato no instante t, e a e k são constantes positivas [na Seção 9.4 veremos que esta é uma equação razoável para $p(t)$].

(a) Encontre $\lim_{t \to \infty} p(t)$.

(b) Encontre a taxa de propagação do boato.

(c) Faça o gráfico de p para o caso $a = 10$, $k = 0{,}5$, onde t é medido em horas. Use o gráfico para estimar quanto tempo será necessário para o boato atingir 80% da população.

83. Uma partícula se move ao longo de uma reta com deslocamento $s(t)$, velocidade $v(t)$ e aceleração $a(t)$. Mostre que

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

Explique a diferença entre os significados das derivadas dv/dt e dv/ds.

84. Ar está sendo bombeado para dentro de um balão climático esférico. Em qualquer instante t, o volume do balão é $V(t)$ e seu raio é $r(t)$.

(a) O que as derivadas dV/dr e dV/dt representam?

(b) Expresse dV/dt em termos de dr/dt.

85. O *flash* de uma câmera armazena carga em um capacitor e a dispara instantaneamente quando ativado. Os dados a seguir descrevem a carga remanescente no capacitor (medida em microcoulombs, μC) no instante t (medido em segundos).

t	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
Q	100,00	81,87	67,03	54,88	44,93	36,76

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para encontrar um modelo exponencial para a carga (veja a Seção 1.5).

(b) A derivada $Q'(t)$ representa a corrente elétrica (medida em microampères, μA) que flui do capacitor para a lâmpada do *flash*. Use a parte (a) para estimar a corrente quando $t = 0{,}04$ s. Compare com o resultado do Exemplo 2 na Seção 2.1.

86. A tabela fornece a população do México (em milhões) em anos de censo no século XX.

Ano	População	Ano	População
1900	13,6	1960	34,9
1910	15,2	1970	48,2
1920	14,3	1980	66,8
1930	16,6	1990	81,2
1940	19,7	2000	97,5
1950	25,8		

(a) Use uma calculadora gráfica ou um computador para ajustar uma função exponencial com os dados. Faça um gráfico dos pontos dados e do modelo exponencial. Quão bom é o ajuste?

(b) Estime as taxas de crescimento populacional em 1950 e 1960 fazendo a média de inclinações de retas secantes.

(c) Use sua exponencial da parte (a) para encontrar um modelo para as taxas de crescimento da população do México no século XX.

(d) Use seu modelo na parte (c) para estimar as taxas de crescimento em 1950 e 1960. Compare com sua estimativa da parte (b).

SCA **87.** Os SCA têm comandos que derivam funções, mas a forma da resposta pode não ser conveniente e, portanto, comandos posteriores podem ser necessários para simplificar a resposta.

(a) Use um SCA para encontrar a derivada do Exemplo 5 e compare com a resposta dele. A seguir, use o comando simplificar e compare novamente.

(b) Use um SCA para derivar a função do Exemplo 6. O que acontecerá se você usar o comando simplificar? O que acontecerá se você usar o comando fatorar? Qual forma da resposta é melhor para localizar as tangentes horizontais?

SCA **88.** (a) Use um SCA para derivar a função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x + 1}{x^4 + x + 1}}$$

e para simplificar o resultado.

(b) Onde o gráfico de f tem tangentes horizontais?

(c) Faça na mesma tela os gráficos de f e f'. Os gráficos são consistentes com sua resposta da parte (b)?

89. Use a Regra da Cadeia para demonstrar o que segue.

(a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.

(b) A derivada de uma função ímpar é uma função par.

90. Use a Regra da Cadeia e a Regra do Produto para dar uma demonstração alternativa da Regra do Quociente.
[*Sugestão*: Escreva $f(x)/g(x) = f(x)[g(x)]^{-1}$.]

91. (a) Se n for um inteiro positivo, demonstre que

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^n x \cos nx) = n \,\text{sen}^{n-1} x \cos(n+1)x$$

(b) Encontre uma fórmula para a derivada de $y = \cos^n x \cos nx$ que seja similar àquela da parte (a).

92. Suponha que $y = f(x)$ seja uma curva que está sempre acima do eixo x e que não tenha uma tangente horizontal, em que f é derivável em toda a parte. Para quais valores de y a taxa de variação de y^5 em relação a x é 80 vezes a taxa de variação de y em relação a x?

93. Use a Regra da Cadeia para mostrar que, se θ for medido em graus, então

$$\frac{d}{d\theta}(\text{sen}\,\theta) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

(Isso dá uma razão para a convenção de que a medida em radianos é sempre usada quando tratamos o cálculo de funções trigonométricas: as fórmulas de derivação não são simples se usarmos a medida em graus.)

94. (a) Escreva $|x| = \sqrt{x^2}$ e use a Regra da Cadeia para mostrar que

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

(b) Se $f(x) = |\text{sen}\, x|$, encontre $f'(x)$ e esboce os gráficos de f e f'. Onde f não é derivável?

(c) Se $g(x) = \text{sen}\,|x|$, encontre $g'(x)$ e esboce os gráficos de g e g'. Onde g não é derivável?

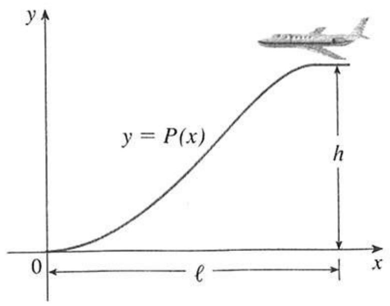
95. Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, onde f e g são funções duas vezes deriváveis, mostre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

96. Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, onde f e g possuem três derivadas, encontre uma fórmula para d^3y/dx^3 análoga à dada no Exercício 95.

PROJETO APLICADO

ONDE UM PILOTO DEVERIA INICIAR A DESCIDA?



Um caminho de aproximação para uma aeronave pousando é mostrado na figura ao lado e ele satisfaz as seguintes condições:

(i) A altitude de cruzeiro é h quando a descida começa a uma distância horizontal ℓ do ponto de contato na origem.

(ii) O piloto deve manter uma velocidade horizontal constante v em toda a descida.

(iii) O valor absoluto da aceleração vertical não deve exceder uma constante k (que é muito menor que a aceleração da gravidade).

1. Encontre um polinômio cúbico $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que satisfaça a condição (i) impondo condições adequadas a $P(x)$ e $P'(x)$ no início da descida e no ponto de contato.

2. Use as condições (ii) e (iii) para mostrar que

$$\frac{6hv^2}{\ell^2} \leqslant k$$

3. Suponha que uma companhia aérea decida não permitir que a aceleração vertical do avião exceda $k = 1\,385$ km/h². Se a altitude de cruzeiro do avião for 11 000 m e a velocidade for 480 km/h, a que distância do aeroporto o piloto deveria começar a descer?

4. Trace o caminho de aproximação se as condições dadas no Problema 3 forem satisfeitas.

3.5 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

As funções encontradas até agora podem ser descritas expressando-se uma variável explicitamente em termos de outra; por exemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{ou} \qquad y = x\,\text{sen}\,x$$

ou, em geral, $y = f(x)$. Algumas funções, entretanto, são definidas implicitamente por uma relação entre x e y, tal como

$$\boxed{1} \qquad x^2 + y^2 = 25$$

ou

$$\boxed{2} \qquad x^3 + y^3 = 6xy$$

Em alguns casos é possível resolver tais equações isolando y como uma função explícita (ou várias funções) de x. Por exemplo, se resolvermos a Equação 1 isolando y, obteremos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$, logo, duas das funções determinadas pela Equação implícita 1 são $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ e $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Os gráficos de f e g são os semicírculos superior e inferior do círculo $x^2 + y^2 = 25$ (veja a Figura 1).

As funções trigonométricas inversas que ocorrem com mais frequência são aquelas que acabamos de discutir. As derivadas das quatro funções remanescentes estão dadas na tabela a seguir. As demonstrações das fórmulas ficam como exercício.

As fórmulas para as derivadas de $\operatorname{cossec}^{-1} x$ e $\sec^{-1} x$ dependem das definições que foram usadas para essas funções (veja o Exercício 58).

DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cossec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cotg}^{-1} x) = -\frac{1}{1-x^2}$$

3.5 EXERCÍCIOS

1–4

(a) Encontre y' derivando implicitamente.

(b) Resolva a equação explicitamente isolando y e derive para obter y' em termos de x.

(c) Verifique que suas soluções para as partes (a) e (b) são consistentes, substituindo a expressão para y em sua solução para a parte (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$ **2.** $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$ **4.** $\cos x + \sqrt{y} = 5$

5–20 Encontre dy/dx derivando implicitamente.

5. $x^2 + y^3 = 1$ **6.** $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

7. $x^3 + x^2y + 4y^2 = 6$ **8.** $x^2 - 2xy + y^3 = c$

9. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$ **10.** $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

11. $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$ **12.** $1 + x = \operatorname{sen}(xy^2)$

13. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$ **14.** $y \operatorname{sen}(x^2) = x \operatorname{sen}(y^2)$

15. $e^{x/y} = x - y$ **16.** $\sqrt{x + y} = 1 + x^2y^2$

17. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$ **18.** $\operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$

19. $xy = \operatorname{cotg}(xy)$ **20.** $\operatorname{sen} x + \cos y = \operatorname{sen} x \cos y$

21. Se $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ e $f(1) = 2$, ache $f'(1)$.

22. Se $g(x) + x \operatorname{sen} g(x) = x^2$, ache $g'(0)$.

23–24 Considere y como a variável independente e x como a variável dependente e use a derivação implícita para encontrar dx/dy.

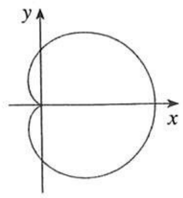
23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$ **24.** $y \sec x = x \operatorname{tg} y$

25–30 Use a derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

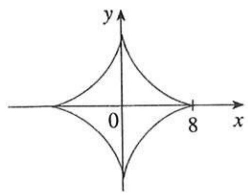
25. $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$ (elipse)

26. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$, $(1, 2)$ (hipérbole)

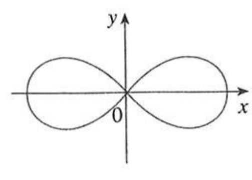
27. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$
$\left(0, \tfrac{1}{2}\right)$
(cardioide)



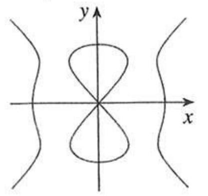
28. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
$\left(-3\sqrt{3}, 1\right)$
(astroide)



29. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$
$(3, 1)$
(lemniscata)



30. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$
$(0, -2)$
(curva do diabo)



31. (a) A curva com equação $y^2 = 5x^4 - x^2$ é chamada **kampyle** (dc grego, curvado) **de Eudoxo**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, 2)$.

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da reta tan gente em uma tela comum. (Se sua ferramenta gráfica pude fazer o gráfico de curvas definidas implicitamente, então use esse recurso. Se não, você poderá ainda fazer o gráfico dess curva separando sua metade superior da inferior.)

32. (a) A curva com equação $y^2 = x^3 + 3x^2$ é denominada **cúbica de Tschirnhausen**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, -2)$.

(b) Em que pontos essa curva tem uma tangente horizontal?

(c) Ilustre as partes (a) e (b) fazendo o gráfico da curva e das retas tangentes sobre uma tela comum.

33–36 Encontre y'' por derivação implícita.

33. $9x^2 + y^2 = 9$ **34.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

35. $x^3 + y^3 = 1$ **36.** $x^4 + y^4 = a^4$

SCA **37.** Formas extravagantes podem ser criadas usando-se a capacidade de traçar funções definidas implicitamente de um SCA.

(a) Faça o gráfico da curva com equação

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

Em quantos pontos essa curva tem tangentes horizontais? Estime as coordenadas x desses pontos.

(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(0, 1)$ e $(0, 2)$.

(c) Encontre as coordenadas x exatas nos pontos da parte (a).

(d) Crie curvas mais extravagantes ainda modificando a equação da parte (a).

SCA **38.** (a) A curva com a equação

$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

tem sido comparada com um "vagão sacolejante". Use um SCA para fazer essa curva e descubra o porquê desse nome.

(b) Em quantos pontos essa curva tem retas tangentes horizontais? Encontre as coordenadas x desses pontos.

39. Encontre os pontos sobre a lemniscata do Exercício 29 onde a tangente é horizontal.

40. Mostre, fazendo a derivação implícita, que a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

41. Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0).

42. Mostre que a soma das coordenadas das intersecções com os eixos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c.

43. Mostre, usando a derivação implícita, que qualquer reta tangente, em um ponto P, a um círculo com centro O é perpendicular ao raio OP.

44. A Regra da Potência pode ser demonstrada usando a derivação implícita para o caso onde n é um número racional, $n = p/q$, e $y = f(x) = x^n$ é suposta de antemão ser uma função derivável. Se $y = x^{p/q}$, então $y^q = x^p$. Use a derivação implícita para mostrar que

$$y' = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}$$

45–54 Encontre a derivada da função. Simplifique onde possível.

45. $y = \text{tg}^{-1}\sqrt{x}$ **46.** $y = \sqrt{\text{tg}^{-1}x}$

47. $y = \text{sen}^{-1}(2x + 1)$ **48.** $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}\,\sec^{-1}x$

49. $H(x) = (1 + x^2)\,\text{arctg}\,x$ **50.** $y = \text{tg}^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

51. $h(t) = \text{cotg}^{-1}(t) + \text{cotg}^{-1}(1/t)$ **52.** $F(\theta) = \text{arcsen}\sqrt{\text{sen}\,\theta}$

53. $y = \cos^{-1}(e^{2x})$ **54.** $y = \text{arctg}\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

55–56 Encontre $f'(x)$. Verifique se sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f'.

55. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\text{arcsen}\,x$ **56.** $f(x) = x\,\text{arctg}\,(x^2 - x)$

57. Demonstre a fórmula para $(d/dx)\,(\cos^{-1}x)$ pelo mesmo método usado para $(d/dx)(\text{sen}^{-1}x)$.

58. (a) Uma maneira de definir $\sec^{-1}x$ é dizer que $y = \sec^{-1}x \Leftrightarrow \sec y = x$ e $0 \leqslant y < \pi/2$ ou $\pi \leqslant y < 3\pi/2$. Mostre que, se essa definição for adotada, então

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

(b) Outra maneira de definir $\sec^{-1}x$ é dizer que $y = \sec^{-1}x \Leftrightarrow \sec y = x$ e $0 \leqslant y \leqslant \pi, y \neq 0$. Mostre que, se essa definição for adotada, então

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

59–62 Duas curvas são **ortogonais** se suas retas tangentes forem perpendiculares em cada ponto de intersecção. Mostre que as famílias dadas de curvas são **trajetórias ortogonais** uma em relação a outra, ou seja, toda curva de uma família é ortogonal a toda curva da outra família. Esboce ambas as famílias de curvas no mesmo sistema de coordenadas.

59. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

60. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

61. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

62. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

63. A equação $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa uma "elipse girada", isto é, uma elipse cujos eixos não são paralelos aos eixos coordenados. Encontre os pontos nos quais essa elipse cruza o eixo x e mostre que as retas tangentes nesses pontos são paralelas.

64. (a) Onde a reta normal à elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$ no ponto $(-1, 1)$ intercepta a elipse uma segunda vez?

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da elipse e da reta normal.

65. Encontre todos os pontos sobre a curva $x^2y^2 + xy = 2$ onde a inclinação da reta tangente é -1.

66. Encontre as equações de ambas as retas tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que passam pelo ponto $(12, 3)$.

67. (a) Suponha que f seja uma função injetora, derivável, e que sua função inversa f^{-1} seja também derivável. Use a derivação implícita para mostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

desde que o denominador não seja 0.

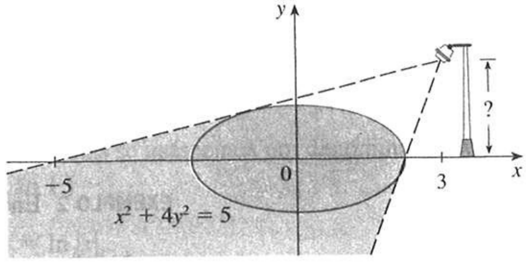
(b) Se $f(4) = 5$ e $f'(4) = \frac{2}{3}$, encontre $(f^{-1})'(5)$.

68. (a) Mostre que $f(x) = 2x + \cos x$ é injetora.

(b) Qual o valor de $f^{-1}(1)$?

(c) Use a fórmula do Exercício 67(a) para determinar $(f^{-1})'(1)$.

69. A figura mostra uma lâmpada localizada três unidades à direita do eixo y e uma sombra originada pela região elíptica $x^2 + 4y^2 \leq 5$. Se o ponto $(-5, 0)$ estiver na borda da sombra, qual a altura da lâmpada acima do eixo x?



3.6 DERIVADAS DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Nesta seção vamos usar a derivação implícita para achar as derivadas das funções logarítmicas $y = \log_a x$ e, em particular, da função logarítmica natural $y = \ln x$. [É possível demonstrar que as funções logarítmicas são deriváveis: com certeza isso é plausível a partir dos seus gráficos. (Veja a Figura 12 na Seção 1.6.)]

1
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

DEMONSTRAÇÃO Seja $y = \log_a x$. Então

$$a^y = x$$

■ A Fórmula 3.4.5 diz que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Derivando essa equação implicitamente em relação a x, usando a Fórmula 3.4.5, obtemos

$$a^y(\ln a)\frac{dy}{dx} = 1$$

e assim
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$ □

Se pusermos $a = e$ na Fórmula 1, então o fator $\ln a$ no lado direito torna-se $\ln e = 1$, e obtemos a fórmula para a derivada da função logarítmica natural $\log_e x = \ln x$:

2
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Comparando as Fórmulas 1 e 2, vemos uma das principais razões para os logaritmos naturais (logaritmos com base e) serem usados em cálculo. A fórmula de derivação é a mais simples quando $a = e$, pois $\ln e = 1$.

EXEMPLO 1 Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

SOLUÇÃO Para usar a Regra da Cadeia vamos fazer $u = x^3 + 1$. Então $y = \ln u$; logo:

3.6 EXERCÍCIOS

1. Explique por que a função logarítmica natural $y = \ln x$ é usada mais vezes no cálculo do que as outras funções logarítmicas $y = \log_a x$.

2–22 Derive a função.

2. $f(x) = \ln(x^2 + 10)$

3. $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$

4. $f(x) = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$

5. $f(x) = \log_2(1 - 3x)$

6. $f(x) = \log_5(xe^x)$

7. $f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$

8. $f(x) = \ln \sqrt[5]{x}$

9. $f(x) = \sqrt{x}\,\ln x$

10. $f(t) = \dfrac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$

11. $F(t) = \ln \dfrac{(2t + 1)^3}{(3t - 1)^4}$

12. $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

13. $g(x) = \ln(x\sqrt{x^2 - 1})$

14. $F(y) = y \ln(1 + e^y)$

15. $y = \dfrac{\ln x}{1 + x}$

16. $y = \ln(x^4 \operatorname{sen}^2 x)$

17. $y = \ln|2 - x - 5x^2|$

18. $H(z) = \ln \sqrt{\dfrac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

20. $y = [\ln(1 + e^x)]^2$

21. $y = 2x \log_{10} \sqrt{x}$

22. $y = \log_2(e^{-x} \cos \pi x)$

23–26 Encontre y' e y''.

23. $y = x^2 \ln(2x)$

24. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

25. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

26. $y = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$

27–30 Derive f e encontre o domínio de f.

27. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln(x - 1)}$

28. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \ln x}$

29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

30. $f(x) = \ln \ln \ln x$

31. Se $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, encontre $f'(1)$.

32. Se $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$, encontre $f'(0)$.

33–34 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

33. $y = \ln(xe^{x^2})$, $(1, 1)$

34. $y = \ln(x^3 - 7)$, $(2, 0)$

35. Se $f(x) = \operatorname{sen} x + \ln x$, encontre $f'(x)$. Verifique que sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f'.

36. Encontre as equações das retas tangentes à curva $y = (\ln x)/x$ nos pontos $(1, 0)$ e $(e, 1/e)$. Ilustre fazendo o gráfico da curva e de suas retas tangentes.

37–48 Use a derivação logarítmica para achar a derivada de função.

37. $y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$

38. $y = \sqrt{x}\,e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$

39. $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{tg}^4 x}{(x^2 + 1)^2}$

40. $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$

41. $y = x^x$

42. $y = x^{1/x}$

43. $y = x^{\operatorname{sen} x}$

44. $y = \sqrt{x}^x$

45. $y = (\cos x)^x$

46. $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$

47. $y = (\operatorname{tg} x)^{1/x}$

48. $y = (\ln x)^{\cos x}$

49. Encontre y' se $y = \ln(x^2 + y^2)$.

50. Encontre y' se $x^y = y^x$.

51. Encontre uma fórmula para $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = \ln(x - 1)$.

52. Encontre $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.

53. Use a definição da derivada para demonstrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

54. Mostre que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ para qualquer $x > 0$.

3.7 TAXAS DE VARIAÇÃO NAS CIÊNCIAS NATURAIS E SOCIAIS

Sabemos que se $y = f(x)$, então a derivada dy/dx pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x. Nesta seção, examinaremos algumas aplicações dessa ideia na física, química, biologia, economia e outras ciências.

Vamos nos recordar da Seção 2.7 que apresentou a ideia básica das taxas de variação. Se x variar de x_1 a x_2, então a variação em x será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em y será

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

UMA ÚNICA IDEIA, MUITAS INTERPRETAÇÕES

A velocidade, a densidade, a corrente, a potência e o gradiente da temperatura na física; a taxa de reação e a compressibilidade na química; a taxa de crescimento e o gradiente da velocidade do sangue na biologia; o custo e o lucro marginal na economia; a taxa do fluxo do calor na geologia; a taxa de desenvolvimento do desempenho na psicologia; a taxa de divulgação de um boato na sociologia — todos esses são casos especiais de um único conceito matemático, a derivada.

Isto é uma ilustração do fato de que parte do poder da matemática está em sua abstração. Um único conceito matemático abstrato (tal como a derivada) pode ter interpretações diferentes para cada uma das ciências. Quando desenvolvemos as propriedades do conceito matemático de uma vez por todas, podemos voltar e aplicar esses resultados em todas as ciências. Isso é muito mais eficiente do que desenvolver as propriedades de conceitos especiais para cada ciência separada. O matemático francês Joseph Fourier (1768-1830) colocou isso sucintamente: "Os matemáticos comparam os mais diversos fenômenos e descobrem as analogias secretas que os unem".

3.7 EXERCÍCIOS

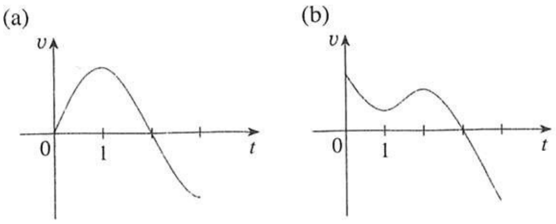
1–4 Uma partícula move-se segundo a lei do movimento $s = f(t)$, $t \geqslant 0$, em que t é medido em segundos e s em metros.

(a) Encontre a velocidade no instante t.
(b) Qual a velocidade depois de 3 s?
(c) Quando a partícula está em repouso?
(d) Quando a partícula está se movendo no sentido positivo?
(e) Encontre a distância total percorrida durante os 8 primeiros segundos.
(f) Desenhe um diagrama como na Figura 2 para ilustrar o movimento da partícula.
(g) Encontre a aceleração no instante t e depois de 3 s.
(h) Faça os gráficos das funções posição, velocidade e aceleração para $0 \leqslant t \leqslant 8$.
(i) Quando a partícula está acelerando? Quando está freando?

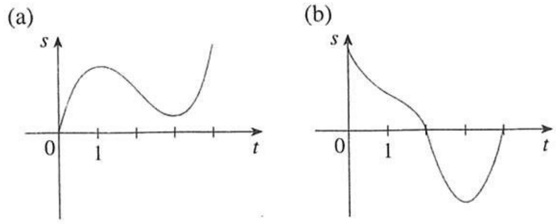
1. $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$ **2.** $f(t) = 0{,}01t^4 - 0{,}04t^3$

3. $f(t) = \cos(\pi t/4)$, $t \leqslant 10$ **4.** $f(t) = te^{-t/2}$

5. São mostrados os gráficos das funções *velocidade* de duas partículas, com t medido em segundos. Quando cada partícula está acelerando? Quando está freando? Explique.



6. São mostrados os gráficos das funções *posição* de duas partículas, com t medido em segundos. Quando cada partícula está acelerando? Quando está freando? Explique.



7. A função posição de uma partícula é dada por $s = t^3 - 4{,}5t^2 - 7t$, $t \geqslant 0$
(a) Quando a partícula atinge a velocidade de 5 m/s?
(b) Quando a aceleração é 0? Qual é o significado deste valor de t?

8. Se uma bola for empurrada ladeira abaixo, sobre um plano inclinado, a uma velocidade inicial de 5 m/s, a distância que ela terá rolado, após t segundos, será dada por $s = 5t + 3t^2$.
(a) Determine sua velocidade após 2 s.
(b) Quão longe ela estará do ponto de partida quando sua velocidade atingir 35 m/s?

9. Se uma pedra for atirada verticalmente para cima sobre a superfície da Lua, com uma velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) após t segundos será $h = 10t - 0{,}83t^2$.
(a) Qual a velocidade da pedra após 3 s?
(b) Qual a velocidade da pedra quando ela atingir 25 m?

10. Se uma bola for atirada verticalmente para cima com uma velocidade de 24,5 m/s, então sua altura depois de t segundos é $s = 24{,}5t - 4{,}9t^2$.
(a) Qual a altura máxima atingida pela bola?
(b) Qual a velocidade da bola quando estiver 29,4 m acima do solo na subida? E na descida?

11. (a) Uma companhia produz *chips* de computador a partir de placas quadradas de silício. Ela quer manter o comprimento do lado da placa muito próximo de 15 mm e deseja saber como a área $A(x)$ da placa varia quando mudamos o comprimento x do lado. Encontre $A'(15)$ e explique seu significado nessa situação.
(b) Mostre que a taxa de variação da área de um quadrado em relação ao comprimento de seu lado é a metade de seu perímetro. Tente explicar geometricamente por que isso é verdade, desenhando um quadrado cujo comprimento de lado x é aumentado em Δx. Como aproximar as mudanças resultantes na área ΔA se Δx for pequeno?

12. (a) Os cristais de clorato de sódio são fáceis de crescer no formato de cubos, ao se permitir uma solução de água e clorato de sódio evaporar vagarosamente. Se V for o volume de cada cubo com comprimento de lado x, calcule dV/dx quando $x = 3$ mm e explique seu significado.
(b) Mostre que a taxa de variação do volume de cada cubo em relação ao comprimento da aresta é igual à metade da área da superfície do cubo. Explique geometricamente por que esse resultado é verdadeiro, mostrando um argumento análogo ao do Exercício 11(b).

13. (a) Encontre a taxa de variação média da área de um círculo em relação a seu raio r quando r varia de
(i) 2 a 3 (ii) 2 a 2,5 (iii) 2 a 2,1
(b) Encontre a taxa de variação instantânea quando $r = 2$.
(c) Mostre que a taxa de variação da área de um círculo em relação a seu raio (para qualquer r) é igual à circunferência do círculo. Tente explicar geometricamente por que isso é verdadeiro, desenhando um círculo cujo raio foi aumentado em Δr. Como você pode aproximar a variação resultante ΔA se Δr for pequeno?

14. Uma pedra caiu dentro de um lago, produzindo uma ondulação circular que cresce para fora a uma velocidade de 60 cm/s. Encontre a taxa segundo a qual a área dentro do círculo está crescendo depois de (a) 1 s, (b) 3 s e (c) 5 s. O que você pode concluir?

15. Um balão esférico começa a ser inflado. Encontre a taxa de crescimento da área da superfície ($S = 4\pi r^2$) em relação ao raio r quando r é (a) 1 pé, (b) 2 pés e (c) 3 pés. Que conclusão você pode tirar?

16. (a) O volume de uma célula esférica em crescimento é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, onde o raio r é medido em micrômetros ($1\mu\text{m} = 10^{-6}\text{m}$). Encontre a taxa de variação média de V em relação a r quando r varia de
(i) 5 a 8μm (ii) 5 a 6μm (iii) 5 a 5,1μm
(b) Encontre a taxa de variação instantânea de V em relação a r quando $r = 5\mu$m.
(c) Mostre que a taxa de variação do volume de uma esfera em relação a seu raio é igual à área de sua superfície. Explique geometricamente por que esse resultado é verdadeiro. Mostre um argumento análogo ao do Exercício 13(c).

17. A massa da parte de uma barra de metal que está situada entre o extremo esquerdo e um ponto x metros à direita é $3x^2$ kg. Encontre a densidade linear (veja o Exemplo 2) quando x for (a) 1 m, (b) 2 m e (c) 3 m. Onde a densidade é maior? E menor?

18. Se um tanque tem 5 000 galões de água, que escoa pelo fundo em 40 minutos, então a Lei de Torricelli dá o volume V de água que restou no tanque depois de t minutos como

$$V = 5\,000\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 40$$

Encontre a taxa segundo a qual a água está escoando do tanque depois de (a) 5 min, (b) 10 min, (c) 20 min e (d) 40 min. Em que instante o escoamento é mais rápido? E mais vagaroso? Resuma o que você encontrou.

19. A quantidade de carga Q, em coloumbs (C), que passa através de um ponto em um fio até o instante t (medido em segundos) é dada por $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Encontre a corrente quando (a) $t = 0{,}5$ s e (b) $t = 1$ s. [Veja o Exemplo 3. A unidade de corrente é o ampère (1 A = 1 C/s).] Em que instante a corrente é mais baixa?

20. A Lei de Gravitação de Newton diz que a intensidade F da força exercida por um corpo de massa m sobre um corpo de massa M é

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

em que G é a constante gravitacional e r é a distância entre os corpos.
(a) Se os corpos estão se movendo, encontre dF/dr e explique seu significado. O que o sinal de menos indica?
(b) Suponha que seja conhecido que a Terra atrai um objeto com uma força que decresce a uma taxa de 2 N/km quando $r = 20\,000$ km. Quão rápido essa força varia quando $r = 10\,000$?

21. A Lei de Boyle afirma que quando uma amostra de gás é comprimida a uma temperatura constante, o produto da pressão pelo volume permanece constante: $PV = C$.
(a) Encontre a taxa de variação do volume em relação à pressão.
(b) Uma amostra de gás está em um recipiente à baixa pressão e é regularmente comprimida à temperatura constante por 10 minutos. O volume decresce mais rapidamente no início ou no final dos 10 minutos? Explique.
(c) Demonstre que a compressibilidade isotérmica (veja o Exemplo 5) é dada por $\beta = 1/P$.

22. Se, no Exemplo 4, uma molécula do produto C é produzida de uma molécula do reagente A e de uma molécula do reagente B, e as concentrações iniciais de A e B têm um mesmo valor $[A] = [B] = a$ mols/L, então

$$[C] = a^2kt/(akt + 1)$$

onde k é uma constante.
(a) Encontre a taxa de reação no instante t.
(b) Mostre que se $x = [C]$, então

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2$$

(c) O que acontece com a concentração quando $t \to \infty$?

(d) O que acontece com a taxa de reação quando $t \to \infty$?

(e) O que os resultados da parte (c) e (d) significam em termos práticos?

23. No Exemplo 6, consideramos uma população de bactérias que dobra a cada hora. Suponha que outra população de bactérias triplique a cada hora e comece com 400 bactérias. Encontre a expressão para o número n de bactérias depois de t horas e use-a para estimar a taxa de crescimento da população de bactérias depois de 2,5 horas.

24. O número de células de levedura em uma cultura de laboratório aumenta rapidamente no início, mas eventualmente estabiliza. A população é modelada pela função

$$n = f(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,7t}}$$

em que t é medido em horas. No instante $t = 0$ a população é 20 células e está crescendo a uma taxa de 12 células/hora. Encontre os valores de a e b. De acordo com este modelo, o que ocorre com a população de levedura depois de muito tempo?

25. A tabela dá a população mundial no século XX.

Ano	População (em milhões)	Ano	População (em milhões)
1900	1 650	1960	3 040
1910	1 750	1970	3 710
1920	1 860	1980	4 450
1930	2 070	1990	5 280
1940	2 300	2000	6 080
1950	2 560		

(a) Estime a taxa de crescimento populacional em 1920 e em 1980 fazendo a média das inclinações de duas retas secantes.

(b) Use uma calculadora gráfica ou computador para achar uma função cúbica (um polinômio de terceiro grau) que modele os dados (veja a Seção 1.2).

(c) Utilize o modelo da parte (b) para achar um modelo para a taxa de crescimento populacional no século XX.

(d) Use a parte (c) para estimar as taxas de crescimento em 1920 e 1980. Compare com sua estimativa da parte (a).

(e) Estime a taxa de crescimento em 1985.

26. A tabela mostra como a média de idade das mulheres japonesas quando se casam pela primeira vez variou na última metade do século XX.

t	$A(t)$	t	$A(t)$
1950	23,0	1980	25,2
1955	23,8	1985	25,5
1960	24,4	1990	25,9
1965	24,5	1995	26,3
1970	24,2	2000	27,0
1975	24,7		

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para modelar esses dados por um polinômio de quarto grau.

(b) Use a parte (a) para achar um modelo para $A'(t)$.

(c) Estime a taxa de variação da idade no primeiro casamento dessas mulheres em 1990.

(d) Faça o gráfico dos pontos dados e dos modelos para A e A'.

27. Considere a lei do fluxo laminar dada no Exemplo 7. Considere um vaso sanguíneo com raio 0,01 cm, comprimento 3 cm, diferença de pressão 3 000 dinas/cm^2, e viscosidade $\eta = 0,027$.

(a) Encontre a velocidade do sangue ao longo do eixo central $r = 0$, no raio $r = 0,005$ cm, e na parede $r = R = 0,01$ cm.

(b) Encontre o gradiente da velocidade em $r = 0$, $r = 0,005$ e $r = 0,01$.

(c) Onde a velocidade é máxima? Onde a velocidade varia mais?

28. A frequência da vibração de uma corda de violino é dada por

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

onde L é o comprimento da corda; T, sua tensão; ρ, sua densidade linear. [Veja o Capítulo 11 em D. E. Hall, *Musical Acoustics*, 3. ed. (Pacific Grover, CA: Brooks/Cole, 2002).]

(a) Encontre a taxa de variação da freqüência em relação

(i) ao comprimento (quando T e ρ são constantes);

(ii) à tensão (quando L e ρ são constantes);

(iii) à densidade linear (quando L e T são constantes).

(b) A intensidade de uma nota (quão alta ou baixa soa a nota) é determinada pela frequência f. (Quanto maior a frequência, maior a intensidade.) Use os sinais das derivadas da parte (a) para determinar o que acontece com a intensidade de uma nota

(i) quando o comprimento efetivo de uma corda é decrescido colocando-se o dedo sobre ela, de forma que uma porção menor da corda vibre;

(ii) quando a tensão é aumentada girando-se a cravelha (pino de afinação);

(iii) quando a densidade linear é aumentada, mudando-se a corda.

29. O custo, em dólares, da produção de x metros de certo tecido é

$$C(x) = 1\,200 + 12x - 0,1x^2 + 0,0005x^3$$

(a) Encontre a função custo marginal.

(b) Encontre $C'(200)$ e explique seu resultado. O que ele prediz?

(c) Compare $C'(200)$ com o custo de manufaturado 201º metro de tecido.

30. A função custo para uma certa mercadoria é

$$C(x) = 339 + 25x - 0{,}09x^2 + 0{,}0004x^3$$

(a) Encontre e interprete $C'(100)$.
(b) Compare $C'(100)$ com o custo de produzir o 101º item.

31. Se $p(x)$ for o valor total da produção quando há x trabalhadores em uma fábrica, então a *produtividade média* da força de trabalho da fábrica é

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

(a) Encontre $A'(x)$. Por que a companhia precisa empregar mais trabalhadores se $A'(x) > 0$?
(b) Mostre que $A'(x) > 0$ se $p'(x)$ for maior que a produtividade média.

32. Se R denota a reação do corpo a algum estímulo de intensidade x, a *sensibilidade* S é definida como a taxa de variação da reação em relação a x. Um exemplo acontece quando a luminosidade x de uma fonte de luz é aumentada e o olho reage decrescendo a área R da pupila. A fórmula experimental

$$R = \frac{40 + 24x^{0,4}}{1 + 4x^{0,4}}$$

tem sido usada para modelar a dependência de R em x quando R é medido em milímetros quadrados e x em uma unidade apropriada de luminosidade.
(a) Encontre a sensibilidade.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico de R e S como funções de x. Comente sobre os valores de R e S em baixos níveis de luminosidade. Isso é o que você esperaria?

33. A lei dos gases para um gás ideal à temperatura absoluta T (em kelvins), pressão P (em atmosferas) e volume V (em litros) é $PV = nRT$, em que n é o número de mols de gás e $R = 0{,}0821$ é uma constante do gás. Suponha que, em um certo instante, $P = 8{,}0$ atm, e está crescendo a uma taxa de 0,10 atm/min, e $V = 10$ L, e está decrescendo a uma taxa de 0,15 L/min. Encontre a taxa de variação de T em relação ao tempo naquele instante, se $n = 10$ mols.

34. Em uma fazenda de piscicultura, uma população de peixes é colocada dentro de um pequeno lago e removida regularmente. Um modelo para a taxa de variação da população é dado pela equação

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t)$$

na qual r_0 é a taxa de nascimento dos peixes; P_c, a população máxima que o pequeno lago pode manter (ou seja, sua *capacidade de suporte*); e β, a porcentagem da população que é removida.
(a) Qual o valor de dP/dt que corresponde à população estável?
(b) Se o pequeno lago pode manter 10 000 peixes, a taxa de nascimento é 5% e a taxa de colheita, 4%, encontre o nível estável da população.
(c) O que acontece se β for aumentada para 5%?

35. No estudo de ecossistemas, o modelo *predador-presa* é muitas vezes usado para estudar a interação entre as espécies. Considere uma população de lobos da tundra, dada por $W(t)$, e caribus, dada por $C(t)$, no norte do Canadá. A interação foi modelada pelas equações:

$$\frac{dc}{dt} = aC - bCW \qquad \frac{dW}{dt} = -cW + dCW$$

(a) Que valores de dC/dt e dW/dt correspondem às populações estáveis?
(b) Como representar matematicamente a afirmação: "O caribu está extinto?".
(c) Suponha que $a = 0{,}05$, $b = 0{,}001$, $c = 0{,}05$ e $d = 0{,}0001$. Encontre todos os pares (C, W) que levam a populações estáveis. Segundo esse modelo, é possível para as espécies viverem em harmonia, ou uma ou as duas espécies acabarão por se extinguir?

3.8 CRESCIMENTO E DECAIMENTO EXPONENCIAL

Em muitos fenômenos naturais, quantidades crescem ou decaem a uma taxa proporcional a seu tamanho. Por exemplo, se $y = f(t)$ for o número de indivíduos em uma população de animais ou de bactérias no instante t, então parece razoável esperar que a taxa de crescimento $f'(t)$ seja proporcional à população $f(t)$; ou seja, $f'(t) = kf(t)$ para alguma constante k. De fato, em condições ideais (meio ambiente ilimitado, nutrição adequada, imunidade a doenças) o modelo matemático dado pela equação $f'(t) = kf(t)$ prevê o que realmente ocorre de modo bastante preciso. Outro exemplo ocorre na física nuclear, na qual a massa de substância radioativa decai a uma taxa proporcional à massa. Na química, a taxa de reação de primeira ordem unimolecular é proporcional à concentração da substância. Em finanças, o valor de uma conta poupança com juros contabilizados continuamente aumenta a uma taxa proporcional a este valor.

Em geral, se $y(t)$ for o valor de uma quantidade y no instante t e se a taxa de variação de y com relação a t for proporcional a seu tamanho $y(t)$ em qualquer instante, então

3.8 EXERCÍCIOS

1. Uma população de protozoários se desenvolve a uma taxa de crescimento relativa constante de 0,7944 membro por dia. No dia zero, a população consistia em dois membros. Encontre o tamanho da população depois de seis dias.

2. Um habitante comum do intestino humano é a bactéria *Escherichia coli*. Uma célula desta bactéria em um meio nutriente líquido se divide em duas células a cada 20 minutos. A população inicial de uma cultura é de 60 células.

(a) Encontre a taxa de crescimento relativa.
(b) Encontre uma expressão para o número de células depois de t horas.
(c) Encontre o número de células após 8 horas.
(d) Encontre a taxa de crescimento depois de 8 horas.
(e) Quando a população atingirá 20 000 células?

3. Uma cultura de bactérias inicialmente contém 100 células e cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho. Depois de uma hora a população cresceu para 420.

(a) Encontre uma expressão para o número de bactérias depois de t horas.
(b) Encontre o número de bactérias após 3 horas.
(c) Encontre a taxa de crescimento depois de 3 horas.
(d) Quando a população atingirá 10 000 células?

4. Uma cultura de bactérias cresce a uma taxa de crescimento relativa constante. Depois de 2 horas existem 600 bactérias e depois de 8 horas a contagem é 75 000.

(a) Encontre a população inicial.
(b) Encontre uma expressão para a população depois de t horas.
(c) Encontre o número de células após 5 horas.
(d) Encontre a taxa de crescimento depois de 5 horas.
(e) Quando a população atingirá 200 000 células?

5. A tabela dá estimativas da população mundial, em milhões, de 1750 a 2000.

Ano	População	Ano	População
1750	790	1900	1 650
1800	980	1950	2 560
1850	1 260	2000	6 080

(a) Use o modelo exponencial e os valores da população para 1750 e 1800 para prever a população do mundo em 1900 e 1950. Compare com os valores da tabela.
(b) Use o modelo exponencial e os valores da população para 1850 e 1900 para prever a população do mundo em 1950. Compare com o valor da tabela.
(c) Use o modelo exponencial e os valores da população para 1900 e 1950 para prever a população do mundo em 2000. Compare com o valor da tabela e tente explicar a discrepância.

6. A tabela dá a população da Índia, em milhões, para a segunda metade do século XX.

Ano	População
1951	361
1961	439
1971	548
1981	683
1991	846
2001	1 029

(a) Use o modelo exponencial e os valores do censo para 1951 e 1961 para prever a população em 2001. Compare com o valor da tabela.
(b) Use o modelo exponencial e os valores do censo para 1961 e 1981 para prever a população em 2001. Compare com o valor da tabela. A seguir, use este modelo para prever a população nos anos de 2010 e 2020.
(c) Trace ambas as funções exponenciais nas partes (a) e (b) com um gráfico da população real. Estes modelos são razoáveis?

7. As experiências mostram que se a reação química

$$N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + \tfrac{1}{2}O_2$$

ocorrer a 45°C, a taxa de reação do pentóxido de dinitrogênio é proporcional à sua concentração da seguinte forma:

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0{,}0005[N_2O_5]$$

(a) Encontre uma expressão para a concentração $[N_2O_5]$ depois de t segundos se a concentração inicial for C.
(b) Quanto tempo levará para que a reação reduza a concentração de N_2O_5 para 90% de seu valor original?

8. O bismuto-210 tem uma meia-vida de 5,0 dias.

(a) Uma amostra tem originalmente uma massa de 800 mg. Encontre uma fórmula para a massa remanescente depois de t dias.
(b) Encontre a massa remanescente depois de 30 dias.
(c) Quando a massa se reduzirá a 1 mg?
(d) Esboce o gráfico da função massa.

9. A meia-vida do césio-137 é 30 anos. Suponha que tenhamos uma amostra de 100 mg.

(a) Encontre a massa remanescente após t anos.
(b) Quanto da amostra restará depois de 100 anos?
(c) Depois de quanto tempo restará apenas 1 mg?

10. Uma amostra de trítio-3 decai para 94,5% de sua quantidade original depois de um ano.

(a) Qual é a meia-vida do trítio-3?
(b) Quanto tempo levaria para a amostra decair para 20% de sua quantidade original?

11. Os cientistas podem determinar a idade de objetos antigos pelo método de datação por *carbono radioativo*. O bombardeamento da parte superior da atmosfera por raios cósmicos converte o nitrogênio em um isótopo radioativo do carbono, ^{14}C, com meia-

-vida de cerva de 5 730 anos. A vegetação absorve o dióxido de carbono através da atmosfera e a vida animal assimila ^{14}C através da cadeia alimentar. Quando uma planta ou animal morre, para de repor seu carbono e a quantidade de ^{14}C começa a decrescer por decaimento radioativo. Portanto o nível de radioatividade também deve decrescer exponencialmente.

Foi descoberto que um fragmento de pergaminho tinha cerca de 74% de ^{14}C do que os materiais das plantas têm atualmente na terra. Estime a idade do papiro.

12. Uma curva passa pelo ponto (0, 5) e tem a propriedade de que a inclinação da curva em todo ponto P é duas vezes a coordenada y de P. Qual é a equação da curva?

13. Um peru assado é tirado de um forno quando a sua temperatura atinge 85 °C e ele é colocado sobre uma mesa em um cômodo em que a temperatura é 22 °C.

(a) Se a temperatura do peru for 65 °C depois de meia hora, qual será a temperatura depois de 45 minutos?

(b) Quando o peru terá esfriado para 40 °C?

14. Um termômetro é tirado de uma sala na qual a temperatura é 20 °C e levado para fora, onde a temperatura é 5 °C. Depois de 1 minuto a leitura no termômetro é 12 °C.

(a) Qual será a leitura no termômetro depois de mais um minuto?

(b) Quando a leitura no termômetro será 6 °C?

15. Quando uma bebida gelada é tirada da geladeira, sua temperatura é 5 °C. Depois de 25 minutos em uma sala a 20 °C, sua temperatura terá aumentado para 10 °C.

(a) Qual é a temperatura da bebida depois de 50 minutos?

(b) Quando a temperatura será 15 °C?

16. Uma xícara de café recém coado tem a temperatura de 95 °C em uma sala a 20 °C. Quando sua temperatura for 70 °C, ele estará esfriando a uma taxa de 1 °C por minuto. Quando isto ocorre?

17. A taxa de variação da pressão atmosférica P com relação à altitude h é proporcional a P, desde que a temperatura seja constante. A 15 °C a pressão é 101,3 kPa no nível do mar e 87,14 kPa em $h = 1\ 000$ m.

(a) Qual é a pressão a uma altitude de 3 000 m?

(b) Qual é a pressão no topo do Monte McKinley, a uma altitude de 6 187 m?

18. (a) Se \$ 1 000 forem emprestados a 8% de juros, encontre as quantias devidas ao fim de três anos se os juros forem compostos (i) anualmente, (ii) trimestralmente, (iii) mensalmente, (iv) semanalmente, (v) diariamente, (vi) a cada hora ou (vii) continuamente.

(b) Suponha que \$ 1 000 sejam emprestados e que os juros sejam capitalizados continuamente. Se $A(t)$ for a quantia devida depois de t anos, em que $0 \leqslant t \leqslant 3$, trace $A(t)$ para cada uma das taxas de juros 6%, 8% e 10% em uma mesma tela.

19. (a) Se \$ 3 000 forem investidos a 5% de juros, encontre o valor do investimento ao fim de 5 anos, para juros capitalizados (i) anualmente, (ii) semestralmente, (iii) mensalmente, (iv) semanalmente, (v) diariamente ou (vi) continuamente.

(b) Se $A(t)$ for a quantia do investimento no instante t para o caso da capitalização contínua, escreva uma equação diferencial e uma condição inicial satisfeitas por $A(t)$.

20. (a) Quanto tempo levará para um investimento dobrar de valor se a taxa de juros for 6%, capitalizados continuamente?

(b) Qual é a taxa de juros anual equivalente?

3.9 TAXAS RELACIONADAS

Quando bombeamos ar para dentro de um balão, tanto o volume quanto o raio do balão crescem, e suas taxas de crescimento estão relacionadas. Mas é muito mais fácil medir diretamente a taxa de crescimento do volume do que a do raio.

Em um problema de taxas relacionadas, a ideia é calcular a taxa de variação de uma grandeza em termos da taxa de variação da outra (que pode ser medida mais facilmente). O procedimento é achar uma equação que relacione as duas grandezas e então usar a Regra da Cadeia para derivar ambos os lados em relação ao tempo.

■ De acordo com os Princípios de Resolução de Problema discutidos no Capítulo 1, na página 65, o primeiro passo é entender o problema. Isso inclui lê-lo cuidadosamente, identificando o que foi dado e as incógnitas, e introduzir uma notação adequada.

EXEMPLO 1 Ar está sendo bombeado para dentro de um balão esférico e seu volume cresce a uma taxa de 100 cm^3/s. Quão rápido o raio do balão está crescendo quando o diâmetro for 50 cm?

SOLUÇÃO Vamos começar identificando duas coisas:

a *informação dada*:

a taxa de crescimento do volume do ar é 100 cm^3/s

e a *incógnita*:

a taxa de crescimento do raio quando o diâmetro é 50 cm

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} = 0{,}16$$

O holofote está girando a uma taxa de 0,16 rad/s. □

3.9 EXERCÍCIOS

1. Se V for o volume de um cubo com aresta de comprimento x e, à medida que o tempo passa, o cubo se expandir, encontre dV/dt em termos de dx/dt.

2. (a) Se A for a área do círculo com raio r e, à medida que o tempo passa, o círculo se expandir, encontre $dAdt$ em termos de dr/dt.
   (b) Suponha que petróleo vaze por uma ruptura de um petroleiro e espalhe-se em um padrão circular. Se o raio do petróleo derramado crescer a uma taxa constante de 1 m/s, quão rápido a área do vazamento está crescendo quando o raio é igual a 30 m?

3. Cada lado de um quadrado está aumentando a uma taxa de 6 cm/s. Com que taxa a área do quadrado estará aumentando quando a área do quadrado for 16 cm^2?

4. O comprimento de um retângulo está crescendo a uma taxa de 8 cm/s e sua largura está crescendo a uma taxa de 3 cm/s. Quando o comprimento for 20 cm e a largura for 10 cm, quão rapidamente estará crescendo a área do retângulo?

5. Um tanque cilíndrico com raio 5 m está sendo enchido com água a uma taxa de 3 m^3/min. Quão rápido estará aumentando a altura da água?

6. O raio de uma esfera está aumentando a uma taxa de 4 mm/s. Quão rápido o volume estará aumentando quando o diâmetro for 80 mm?

7. Se $y = x^3 + 2x$ e $dx/dt = 5$, encontre dy/dt quando $x = 2$.

8. Se $x^2 + y^2 = 25$ e $dy/dt = 6$, encontre dx/dt quando $y = 4$.

9. Se $z^2 = x^2 + y^2$, $dx/dt = 2$ e $dy/dt = 3$, encontre dz/dt quando $x = 5$ e $y = 12$.

10. Uma partícula move-se ao longo da curva $y = \sqrt{1 + x^3}$. Quando ela atinge o ponto (2, 3), a coordenada y está crescendo a uma taxa de 4 cm/s. Quão rápido está variando a coordenada x do ponto naquele instante?

11–14

(a) Quais são as quantidades dadas no problema?
(b) Qual é a incógnita?
(c) Faça um desenho da situação para qualquer instante t.
(d) Escreva uma equação que relacione as quantidades.
(e) Termine a resolução do problema.

11. Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 2 km, a 800 km/h, e passa diretamente sobre uma estação de radar. Encontre a taxa segundo a qual a distância entre o avião e a estação aumenta quando ele está a 3 km além da estação.

12. Se uma bola de neve derrete de forma que a área de sua superfície decresce a uma taxa de 1 cm^2/min, encontre a taxa segundo a qual o diâmetro decresce quando o diâmetro é 10 cm.

13. Uma luz de rua é colocada no topo de um poste de 5 metros de altura. Um homem com 2 m de altura anda, afastando-se do poste com velocidade de 1,5 m/s ao longo de uma trajetória reta. Com que velocidade se move a ponta de sua sombra quando ele está a 10 m do poste?

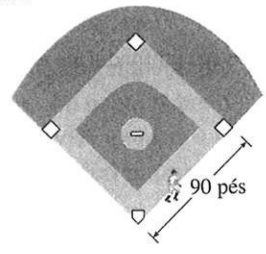
14. Ao meio-dia, o navio A está a 150 km a oeste do navio B. O navio A está navegando para o leste a 35 km/h, e o navio B está navegando para norte a 25 km/h. Quão rápido varia a distância entre os navios às 4 horas da tarde?

15. Dois carros iniciam o movimento partindo de um mesmo ponto. Um viaja para o sul a 30 km/h e o outro para o oeste a 72 km/h. A que taxa está crescendo a distância entre os carros duas horas depois?

16. Um holofote sobre o chão ilumina uma parede 12 m distante dele. Se um homem de 2 m de altura anda do holofote em direção à parede a uma velocidade de 1,6 m/s, quão rápido decresce o comprimento de sua sombra sobre a parede quando ele está a 4 m dela?

17. Um homem começa a andar para o norte a 1,2 m/s a partir de um ponto P. Cinco minutos depois uma mulher começa a andar para o sul a 1,6 m/s de um ponto a 200 m a leste de P. A que taxa as pessoas estão se distanciando 15 minutos depois de a mulher começar a andar?

18. Uma quadra de beisebol é um quadrado com 90 pés. Um batedor atinge a bola e corre em direção à primeira base com uma velocidade de 24 pés/s.
   (a) A que taxa decresce sua distância da segunda base quando ele está a meio caminho da primeira base?
   (b) A que taxa aumenta sua distância da terceira base no mesmo momento?



19. A altura de um triângulo cresce a uma taxa de 1 cm/min, enquanto a área do triângulo cresce a uma taxa de 2 cm^2/min. A que taxa varia a base do triângulo quando a altura é 10 cm e a área, 100 cm^2?

20. Um bote é puxado em direção ao ancoradouro por uma corda que está atada na proa do bote e que passa por uma polia sobre o ancoradouro (colocada 1 m mais alto que a proa). Se a corda for puxada a uma taxa de 1 m/s, quão rápido se aproxima o bote do ancoradouro, quando ele estiver a 8 m dele?

21. Ao meio-dia, um navio A está 100 km a oeste do navio B. O navio A está navegando para o sul a 35 km/h, e o B está indo para o norte a 25 km/h. Quão rápido estará variando a distância entre eles às 4 horas da tarde?

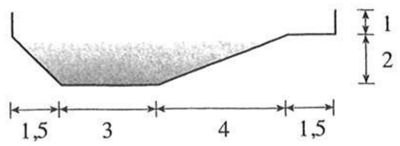
22. Uma partícula se move ao longo da curva $y = \sqrt{x}$. Quando a partícula passa pelo ponto (4, 2), sua coordenada x cresce a uma taxa de 3 cm/s. Quão rápido está variando a distância da partícula à origem nesse instante?

23. Está vazando água de um tanque cônico invertido a uma taxa de 10 000 cm^3/min. Ao mesmo tempo, está sendo bombeada água para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem 6 m de altura e o diâmetro no topo é de 4 m. Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de 20 cm/min quando a altura da água for 2 m, encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada dentro do tanque.

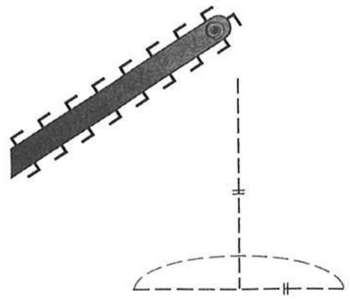
24. Um cocho tem 6 m de comprimento, e suas extremidades têm a forma de triângulos isósceles com 1 m de base e 50 cm de altura. Se o cocho for preenchido com água a uma taxa de 1,2 m^3/min, quão rápido estará se elevando o nível da água quando ela tiver 30 cm de profundidade?

25. Um cocho de água tem 10 m de comprimento e uma secção transversal com a forma de um trapezoide isósceles com 30 cm de comprimento na base, 80 cm de extensão no topo e 50 cm de altura. Se o cocho for preenchida com água a uma taxa de 0,2 m^3/min, quão rápido estará subindo o nível da água quando ela tiver 30 cm de profundidade?

26. Uma piscina tem 5 m de largura por 10 m de comprimento, 1 m de profundidade na parte rasa, e 3 m na parte mais funda. Sua secção transversal está mostrada na figura. Se a piscina for enchida a uma taxa de 0,1 m^3/min, quão rápido estará subindo o nível da água quando sua profundidade no ponto mais profundo for de 1 m?



27. Uma esteira transportadora está descarregando cascalho a uma taxa de 3 m^3/min, constituindo uma pilha na forma de cone com o diâmetro da base e altura sempre igual. Quão rápido cresce a altura da pilha quando está a 3 m de altura?



28. Uma pipa a 50 m acima do solo move-se horizontalmente a uma velocidade de 2 m/s. A que taxa decresce o ângulo entre a linha e a horizontal depois de 100 m de linha serem soltos?

29. Dois lados de um triângulo são 4 m e 5 m, e o ângulo entre eles está crescendo a uma taxa de 0,06 rad/s. Encontre a taxa segundo a qual a área está crescendo quando o ângulo entre os lados de comprimento fixo for $\pi/3$.

30. Quão rápido estará o ângulo entre o chão e a escada variando no Exemplo 2 quando a parte de baixo da escada estiver a 3 m da parede?

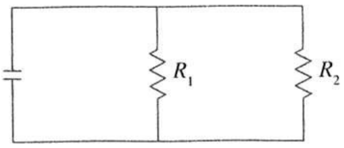
31. A Lei de Boyle afirma que quando uma amostra de gás está sendo comprimida a uma temperatura constante, a pressão P e o volume V satisfazem a equação $PV = C$, onde C é uma constante. Suponha que em um certo instante o volume é de 600 cm^3, a pressão é 150 kPa e a pressão cresce a uma taxa de 20 kPa/min. A que taxa está decrescendo o volume nesse instante?

32. Quando o ar se expande adiabaticamente (sem ganhar ou perder calor), sua pressão P e volume V estão relacionados pela equação $PV^{1,4} = C$, onde C é uma constante. Suponha que em um certo instante o volume é de 400 cm^3 e a pressão, 80 kPa, e está decrescendo a uma taxa de 10 kPa/min. A que taxa está crescendo o volume nesse instante?

33. Se dois resistores com resistências R_1 e R_2 estão conectados em paralelo, como na figura, então a resistência total R, medida em ohms (Ω), é dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

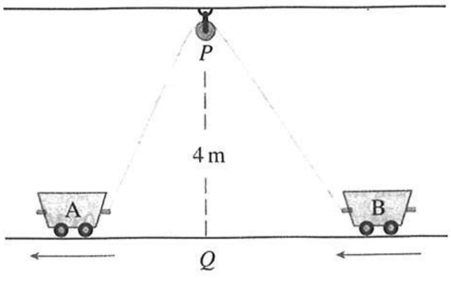
Se R_1 e R_2 estão crescendo a taxas de 0,3 Ω/s e 0,2 Ω/s, respectivamente, quão rápido estará variando R quando $R_1 = 80$ Ω e $R_2 = 100$ Ω?



34. Nos peixes, o peso B do cérebro como uma função do peso corporal W foi modelado pela função potência $B = 0{,}007W^{2/3}$, onde B e W são medidos em gramas. Um modelo para o peso corporal como uma função do comprimento corporal L (medido em centímetros) é $W = 0{,}12L^{2{,}53}$. Se, em 10 milhões de anos, o comprimento médio de uma certa espécie de peixes evoluiu de 15 cm para 20 cm a uma taxa constante, quão rápido estava crescendo o cérebro dessa espécie quando o comprimento médio era de 18 cm?

35. Dois lados de um triângulo têm comprimento 12 m e 15 m. O ângulo entre eles aumenta à taxa 2º/min. Com que velocidade estará aumentando o terceiro lado quando o ângulo dos lados de comprimento fixo estiver em 60º?

36. Duas carretas, A e B, estão conectadas por uma corda de 12 m que passa por uma polia P (veja a figura). O ponto Q no chão está 4 m diretamente abaixo de P e entre as carretas. A carreta A está sendo puxada, afastando-se de Q a uma velocidade de 0,5 m/s. Quão rápido se move a carreta B em direção a Q no instante em que A está a 3 m de Q?



37. Uma câmera de televisão está posicionada a 1 200 m de uma base de lançamento de foguete. O ângulo de elevação da câmera deve variar a uma taxa que possa focalizar o foguete. O mecanismo de foco da câmera também deve levar em conta o aumento da distância entre a câmera e o foguete em subida. Vamos supor que o foguete suba verticalmente e com uma velocidade de 200 m/s quando já tiver subido 900 m.

(a) Quão rápido estará variando a distância da câmera ao foguete naquele momento?

(b) Se a câmera de televisão se mantiver sempre na direção do foguete, quão rápido estará variando o ângulo de elevação dela naquele mesmo momento?

38. Um farol está localizado em uma pequena ilha, e a distância entre ele e o ponto P mais próximo dele em uma costa reta do continente é de 3 km. Sua luz gira quatro revoluções por minuto. Quão rápido estará se movendo o feixe de luz ao longo da costa quando ele estiver a 1 km de P?

39. Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 5 km e passa diretamente sobre um telescópio no chão. Quando o ângulo de elevação for $\pi/3$, este ângulo estará decrescendo a uma taxa de $\pi/6$ rad/min. Quão rapidamente estará o avião se movendo naquele instante?

40. Uma roda-gigante com raio de 10 m está girando a uma taxa de uma revolução a cada dois minutos. Quão rápido um passageiro estará subindo quando seu assento estiver 16 m acima do nível do solo?

41. Um avião voando a uma velocidade constante de 300 km/h passa sobre uma estação de radar no solo a uma altitude de 1 km e subindo em um ângulo de 30º. A que taxa está crescendo a distância do avião em relação à estação de radar 1 minuto mais tarde?

42. Duas pessoas começam a andar a partir do mesmo ponto. Uma vai para o leste a 4 km/h e a outra, para o nordeste a 2 km/h. Quão rápido está variando a distância entre as pessoas após 15 minutos?

43. Um velocista corre em uma pista circular de raio 100 m a uma velocidade constante de 7 m/s. Seu amigo está parado a uma distância de 200 m do centro da pista. Quão rápido estará variando a distância entre os amigos quando estiverem a uma distância de 200 m?

44. O ponteiro dos minutos de um relógio mede 8 mm, enquanto o das horas tem 4 mm de comprimento. Quão rápido está variando a distância entre a ponta dos ponteiros à 1 hora?

3.10 APROXIMAÇÕES LINEARES E DIFERENCIAIS

Vimos que uma curva fica muito perto de sua reta tangente nas proximidades do ponto de tangência. De fato, dando um *zoom* em torno de um ponto sobre o gráfico de uma função derivável, notamos que o gráfico se assemelha cada vez mais à sua reta tangente (veja a Figura 2 na Seção 2.7). Essa observação é a base para um método de encontrar valores aproximados de funções.

Observe que no Exemplo 3 a aproximação $\Delta y \approx dy$ torna-se melhor à medida que Δx fica menor. Observe também que é muito mais fácil calcular dy do que Δy. Para as funções mais complicadas pode ser impossível calcular exatamente Δy. Nesses casos, a aproximação por diferenciais é especialmente útil.

Na notação de diferenciais, a aproximação linear (1) pode ser escrita como

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

Por exemplo, para a função $f(x) = \sqrt{x + 3}$ do Exemplo 1, temos

$$dy = f'(x)dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}$$

Se $a = 1$ e $dx = \Delta x = 0{,}05$, então

$$dy = \frac{0{,}05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0{,}0125$$

e

$$\sqrt{4{,}05} = f(1{,}05) \approx f(1) + dy = 2{,}0125$$

exatamente como encontramos no Exemplo 1.

Nosso exemplo final ilustra o uso de diferenciais na estimativa de erros que ocorrem em virtude de medidas aproximadas.

EXEMPLO 4 O raio de uma esfera tem 21 cm, com um possível erro de medida de no máximo 0,05 cm. Qual é o erro máximo cometido ao usar esse valor de raio para calcular o volume da esfera?

SOLUÇÃO Se o raio da esfera for r, então seu volume é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Se o erro na medida do valor de r for denotado por $dr = \Delta r$, então o erro correspondente no cálculo do valor de V é ΔV, que pode ser aproximado pela diferencial

$$dV = 4\pi r^2\, dr$$

Quando $r = 21$ e $dr = 0{,}05$, temos

$$dV = 4\pi(21)^2 0{,}05 \approx 277$$

O erro máximo no volume calculado é de cerca de 277 cm^3. □

OBS. Embora o erro possível no Exemplo 4 possa parecer muito grande, uma ideia melhor é dada pelo **erro relativo**, que é calculado dividindo-se o erro pelo volume total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\, dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\,\frac{dr}{r}$$

Assim, o erro relativo no volume é cerca de três vezes o erro relativo no raio. No Exemplo 4, o erro relativo no raio é de aproximadamente $dr/r = 0{,}05/21 \approx 0{,}0024$ e produz um erro relativo de cerca de 0,007 no volume. Os erros também poderiam ser expressos como **erros percentuais** de 0,24% no raio e 0,7% no volume.

3.10 EXERCÍCIOS

1–4 Encontre a linearização $L(x)$ da função em a.

1. $f(x) = x^3, \quad a = 1$

2. $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

3. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/2$

4. $f(x) = x^{3/4}, \quad a = 16$

5. Encontre a aproximação linear da função $f(x) = \sqrt{1 - x}$ em $a = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt{0{,}9}$ e $\sqrt{0{,}99}$. Ilustre fazendo os gráficos de f e da reta tangente.

6. Encontre a aproximação linear da função $g(x) = \sqrt[3]{1+x}$ em $a = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt[3]{0{,}95}$ e $\sqrt[3]{1{,}1}$. Ilustre fazendo os gráficos de g e da reta tangente.

7–10 Verifique a aproximação linear dada em $a = 0$. A seguir, determine os valores de x para os quais a aproximação linear tem precisão de 0,1.

7. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

8. $\operatorname{tg} x \approx x$

9. $1/(1+2x)^4 \approx 1 - 8x$

10. $e^x \approx 1 + x$

11–14 Encontre a diferencial da função.

11. (a) $y = x^2 \operatorname{sen} 2x$ (b) $y = \ln\sqrt{1+t^2}$

12. (a) $y = s/(1+2s)$ (b) $y = e^{-u}\cos u$

13. (a) $y = \dfrac{u+1}{u-1}$ (b) $y = (1+r^3)^{-2}$

14. (a) $y = e^{\operatorname{tg} \pi t}$ (b) $y = \sqrt{1 + \ln z}$

15–18 (a) Encontre a diferencial dy e (b) calcule dy para os valores dados de x e dx.

15. $y = e^{x/10}$, $x = 0$, $dx = 0{,}1$

16. $y = 1/(x+1)$, $x = 1$, $dx = -0{,}01$

17. $y = \operatorname{tg} x$, $x = \pi/4$, $dx = -0{,}1$

18. $y = \cos x$, $x = \pi/3$, $dx = 0{,}05$

19–22 Calcule Δy e dy para os valores dados de x e $dx = \Delta x$. A seguir, esboce um diagrama como o da Figura 5, mostrando os segmentos de reta com comprimentos dx, dy e Δy.

19. $y = 2x - x^2$, $x = 2$, $\Delta x = -0{,}4$

20. $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $\Delta x = 1$

21. $y = 2/x$, $x = 4$, $\Delta x = 1$

22. $y = e^x$, $x = 0$, $\Delta x = 0{,}5$

23–28 Use uma aproximação linear (ou diferencial) para estimar o número dado.

23. $(2{,}001)^5$

24. $e^{-0{,}015}$

25. $(8{,}06)^{2/3}$

26. $1/1\,002$

27. $\operatorname{tg} 44°$

28. $\sqrt{99{,}8}$

29–31 Explique em termos de aproximações lineares ou de diferenciais por que a aproximação é razoável.

29. $\sec 0{,}08 \approx 1$

30. $(1{,}01)^6 \approx 1{,}06$

31. $\ln 1{,}05 \approx 0{,}05$

32. Sejam $f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = e^{-2x}$
e $h(x) = 1 + \ln(1-2x)$.
(a) Determine as linearizações para f, g e h em $a = 0$. O que você observa? Como explicar o que aconteceu?
(b) Faça os gráficos de f, g e h e de suas aproximações lineares. Para qual função a aproximação é melhor? Para qual é pior? Justifique.

33. A aresta de um cubo tem 30 cm, com um possível erro de medida de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível no cálculo (a) do volume do cubo e (b) da área da superfície do cubo.

34. O raio de um disco circular é 24 cm, com um erro possível de 0,2 cm.
(a) Use diferenciais para estimar o erro máximo na área calculada do disco.
(b) Qual o erro relativo? Qual o erro percentual?

35. A circunferência de uma esfera mede 84 cm, com erro possível de 0,5 cm.
(a) Use diferenciais para estimar o erro máximo na área calculada da superfície. Qual o erro relativo?
(b) Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo no volume calculado. Qual o erro relativo?

36. Use as diferenciais para estimar a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de 0,05 cm de tinta a um domo com diâmetro de 50 m.

37. (a) Utilize as diferenciais para achar uma fórmula para o volume aproximado de uma fina camada cilíndrica com altura h, raio interno r e espessura Δr.
(b) Qual é o erro envolvido no uso da fórmula da parte (a)?

38. Sabe-se que um lado de um triângulo retângulo mede 20 cm de comprimento e o ângulo oposto foi medido como 30°, com um possível erro de $\pm 1°$.
(a) Use diferenciais para estimar o erro no cálculo da hipotenusa.
(b) Qual é o erro percentual?

39. Se uma corrente I passar por um resistor com resistência R, a Lei de Ohm afirma que a queda de voltagem é $V = RI$. Se V for constante e R for medida com um certo erro, use diferenciais para mostrar que o erro relativo no cálculo de I é aproximadamente o mesmo (em módulo) que o erro relativo em R.

40. Quando o sangue flui ao longo de um vaso sanguíneo, o fluxo F (o volume de sangue por unidade de tempo que passa por um dado ponto) é proporcional à quarta potência do raio R do vaso:
$$F = kR^4$$
(Isso é conhecido como a Lei de Poiseuille; mostraremos por que isso é verdadeiro na Seção 8.4.) Uma artéria parcialmente obstruída pode ser alargada por uma operação chamada angioplastia, na qual um cateter-balão é inflado dentro da artéria a fim de aumentá-la e restaurar o fluxo normal do sangue.
Mostre que a variação relativa em F é cerca de quatro vezes a variação relativa em R. Como um aumento de 5% no raio afeta o fluxo do sangue?

41. Estabeleça as seguintes regras para trabalhar com as diferenciais (onde c denota uma constante e u e v são funções de x).

(a) $dc = 0$ (b) $d(cu) = c\,du$

(c) $d(u + v) = du + dv$ (d) $d(uv) = u\,dv + v\,du$

(e) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ (f) $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

42. Em *Physics: Calculus*, de Eugene Hecht, 2. ed., Pacific Grove, CA, Brooks/Cole, 2002, p. 431, durante a dedução da fórmula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ para o período de um pêndulo de comprimento L, o autor obtém a equação $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para a aceleração tangencial do peso do pêndulo. Ele então afirma: "para ângulos pequenos, o valor de θ em radianos é muito próximo do valor de sen θ; eles diferem por menos do que 2% até cerca de 20°".

(a) Verifique a aproximação linear em 0 para a função seno:

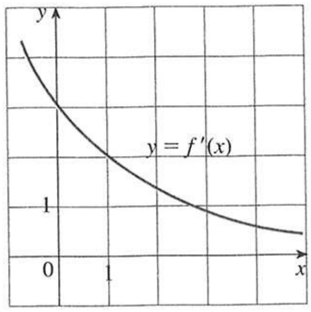
$$\operatorname{sen} x \approx x$$

(b) Use uma ferramenta gráfica para determinar os valores de x para os quais sen x e x difiram por menos do que 2%. Então, verifique a afirmação de Hecht, convertendo de radianos para graus.

43. Suponha que a única informação que temos sobre uma função f é que $f(1) = 5$ e que o gráfico de sua *derivada* é como mostrado.

(a) Use a aproximação linear para estimar $f(0,9)$ e $f(1,1)$.

(b) Suas estimativas na parte (a) são muito grandes ou pequenas? Explique.



44. Suponha que não tenhamos uma fórmula para $g(x)$, mas sabemos que $g(2) = -4$ e $g'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ para todo x.

(a) Use uma aproximação linear para estimar $g(1,95)$ e $g(2,05)$.

(b) Suas estimativas na parte (a) são muito grandes ou pequenas? Explique.

PROJETO DE LABORATÓRIO

POLINÔMIOS DE TAYLOR

A aproximação pela reta tangente é a melhor aproximação de primeiro grau (linear) para $f(x)$ próximo de $x = a$, pois $f(x)$ e $L(x)$ têm a mesma taxa de variação (derivada) em a. Para uma aproximação melhor que a linear, vamos tentar uma aproximação de segundo grau (quadrática) $P(x)$. Em outras palavras, aproximaremos uma curva por uma parábola em vez de uma reta. Para nos assegurarmos de que é uma boa aproximação, estipularemos o seguinte:

(i) $P(a) = f(a)$ (P e f devem ter o mesmo valor em a.)

(ii) $P'(a) = f'(a)$ (P e f devem ter a mesma taxa de variação em a.)

(iii) $P''(a) = f''(a)$ (A inclinação de P e f deve variar segundo a mesma taxa.)

1. Encontre a aproximação quadrática $P(x) = A + Bx + Cx^2$ para a função $f(x) = \cos x$ que satisfaça as condições (i), (ii) e (iii) com $a = 0$. Faça o gráfico de P, de f e da aproximação linear $L(x) = 1$ em uma mesma tela. Comente a qualidade das aproximações P e L de f.

2. Determine os valores de x para os quais a aproximação quadrática $f(x) = P(x)$ do Problema 1 tem precisão de 0,1. [*Sugestão*: Faça o gráfico de $y = P(x)$, $y = \cos x - 0{,}1$ e $y = \cos x + 0{,}1$ na mesma tela.]

3. Para aproximar uma função f por uma função quadrática P nas proximidades de um número a, é melhor escrever P na forma

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2$$

Mostre que a função quadrática que satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

4. Encontre a aproximação quadrática para $f(x) = \sqrt{x + 3}$ nas proximidades de a = 1. Faça os gráficos de f, da aproximação quadrática e da aproximação linear do Exemplo 2 da Seção 3.10 na mesma tela. O que você conclui?

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \square$$

EXEMPLO 5 Encontre $\frac{d}{dx}[\text{tgh}^{-1}(\text{sen}\, x)]$.

SOLUÇÃO Usando a Tabela 6 e a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{d}{dx}[\text{tgh}^{-1}(\text{sen}\, x)] = \frac{1}{1-(\text{sen}\, x)^2}\frac{d}{dx}(\text{sen}\, x)$$

$$= \frac{1}{1-\text{sen}^2 x}\cos x = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x \qquad \square$$

3.11 EXERCÍCIOS

1–6 Encontre o valor numérico de cada expressão.

1. (a) senh 0 (b) cosh 0

2. (a) tgh 0 (b) tgh 1

3. (a) senh(ln 2) (b) senh 2

4. (a) cosh 3 (b) cosh(ln 3)

5. (a) sech 0 (b) $\cosh^{-1} 1$

6. (a) senh 1 (b) $\text{senh}^{-1} 1$

7–19 Demonstre a identidade.

7. $\text{senh}(-x) = -\text{senh}\, x$
(Isso mostra que senh é uma função ímpar.)

8. $\cosh(-x) = \cosh x$
(Isso mostra que cosh é uma função par.)

9. $\cosh x + \text{senh}\, x = e^x$

10. $\cosh x - \text{senh}\, x = e^{-x}$

11. $\text{senh}(x+y) = \text{senh}\, x \cosh y + \cosh x\, \text{senh}\, y$

12. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \text{senh}\, x\, \text{senh}\, y$

13. $\text{cotg}^2 x - 1 = \text{cossech}^2 x$

14. $\text{tgh}(x+y) = \dfrac{\text{tgh}\, x + \text{tgh}\, y}{1 + \text{tgh}\, x\, \text{tgh}\, y}$

15. $\text{senh}\, 2x = 2\, \text{senh}\, x \cosh x$

16. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \text{senh}^2 x$

17. $\text{tgh}(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

18. $\dfrac{1+\text{tgh}\, x}{1-\text{tgh}\, x} = e^{2x}$

19. $(\cosh x + \text{senh}\, x)^n = \cosh nx + \text{senh}\, nx$
(n qualquer número real)

20. Se $\text{tgh}\, x = \frac{12}{13}$, encontre os valores das outras funções hiperbólicas em x.

21. Se $\cosh x = \frac{5}{3}$ e $x > 0$, encontre os valores das outras funções hiperbólicas em x.

22. (a) Use os gráficos de senh, cosh e tgh das Figuras 1–3 para fazer os gráficos de cossech, sech e cotgh.
(b) Verifique os gráficos que você esboçou na parte (a) usando uma ferramenta gráfica para produzi-los.

23. Use as definições das funções hiperbólicas para achar os seguintes limites.
(a) $\lim_{x\to\infty} \text{tgh}\, x$ (b) $\lim_{x\to-\infty} \text{tgh}\, x$
(c) $\lim_{x\to\infty} \text{senh}\, x$ (d) $\lim_{x\to-\infty} \text{senh}\, x$
(e) $\lim_{x\to\infty} \text{sech}\, x$ (f) $\lim_{x\to\infty} \text{cotgh}\, x$
(g) $\lim_{x\to 0^+} \text{cotgh}\, x$ (h) $\lim_{x\to 0^-} \text{cotgh}\, x$
(i) $\lim_{x\to-\infty} \text{cossech}\, x$

24. Demonstre as fórmulas dadas na Tabela 1 para as derivadas das funções (a) cosh, (b) tgh, (c) cossech, (d) sech e (e) cotgh.

25. Dê uma solução alternativa para o Exemplo 3 tomando $y = \text{senh}^{-1} x$ e então usando o Exercício 9 e o Exemplo 1(a), com x substituído por y.

26. Demonstre a Equação 4.

27. Demonstre a Equação 5 usando (a) o método do Exemplo 3 e (b) o Exercício 18, com x substituído por y.

28. Para cada uma das seguintes funções (i) dê uma definição como aquelas em (2), (ii) esboce o gráfico e (iii) encontre uma fórmula similar à Equação 3.
(a) cossech^{-1} (b) sech^{-1} (c) cotgh^{-1}

29. Demonstre as fórmulas dadas na Tabela 6 para as derivadas das funções a seguir

(a) $\cosh^{-1}$ (b) tgh^{-1} (c) cossech^{-1}

(d) secch^{-1} (e) cotgh^{-1}

30–47 Encontre a derivada. Simplifique quando possível.

30. $f(x) = e^x \,\text{senh}\, x$

31. $f(x) = \text{tgh}\, 3x$

32. $g(x) = \cosh^4 x$

33. $h(x) = \cosh(x^4)$

34. $y = x \,\text{cotgh}\,(1 + x^2)$

35. $y = e^{\cosh 3x}$

36. $f(t) = \text{cossech}\, t(1 - \ln \text{cosseh}\, t)$

37. $f(t) = \text{sech}^2(e^t)$

38. $y = \text{senh}(\cosh x)$

39. $y = \text{arctg}(\text{tgh}\, x)$

40. $y = \sqrt[4]{\dfrac{1 + \text{tgh}\, x}{1 - \text{tgh}\, x}}$

41. $G(x) = \dfrac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x}$

42. $y = x^2 \,\text{senh}^{-1}(2x)$

43. $y = \text{tgh}^{-1}\sqrt{x}$

44. $y = x\,\text{tgh}^{-1} x + \ln\sqrt{1 - x^2}$

45. $y = x\,\text{senh}^{-1}(x/3) - \sqrt{9 + x^2}$

46. $y = \text{sech}^{-1}\sqrt{1 - x^2}, \quad x > 0$

47. $y = \text{cotgh}^{-1}\sqrt{x^2 + 1}$

48. O Gateway Arch em St. Louis foi projetado por Eero Saarinen e construído usando a equação

$$y = 211{,}49 - 20{,}96 \cosh 0{,}03291765x$$

para a curva central do arco, em que x e y são medidos em metros e $|x| \leqslant 91{,}20$.

(a) Trace a curva central.

(b) Qual é a altura do arco em seu centro?

(c) Em quais pontos a altura é 100 m?

(d) Qual é a inclinação do arco nos pontos da parte (c)?

49. Se uma onda de comprimento L se move à velocidade v em um corpo de água de profundidade d, então

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \,\text{tgh}\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

em que g é a aceleração da gravidade. (Veja a Figura 5.) Explique por que a aproximação

$$v \approx \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$$

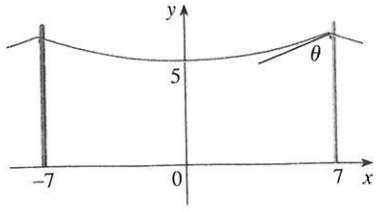
é adequada para águas profundas.

50. Um cabo flexível pendurado sempre tem a forma de uma catenária $y = c + a\cosh(x/a)$, em que c e a são constantes e $a > 0$ (veja a Figura 4 e o Exercício 52). Faça o gráfico de vários membros da família de funções $y = a\cosh(x/a)$. Como o gráfico muda quando a varia?

51. Uma linha de telefone é pendurada entre dois postes separados 14 m, na forma da catenária $y = 20\cosh(x/20) - 15$, em que x e y são medidas em metros.

(a) Encontre a inclinação dessa curva onde ela encontra o poste à direita.

(b) Encontre o ângulo θ entre a reta tangente e o poste.



52. Usando os princípios da física, pode ser mostrado que quando um cabo é pendurado entre dois postes, ele toma a forma de uma curva $y = f(x)$, que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

na qual ρ é a densidade linear do cabo, g é a aceleração da gravidade e T é a tensão no cabo no ponto mais baixo, e o sistema de coordenada é apropriadamente escolhido. Verifique que a função

$$y = f(x) = \frac{T}{\rho g}\cosh\left(\frac{\rho g x}{T}\right)$$

é uma solução dessa equação diferencial.

53. (a) Mostre que qualquer função da forma

$$y = A\,\text{senh}\, mx + B\cosh mx$$

satisfaz a equação diferencial $y'' = m^2 y$.

(b) Encontre $y = y(x)$ tal que $y = 9y''$, $y(0) = -4$, e $y'(0) = 6$.

54. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\text{senh}\, x}{e^x}$.

55. Em quais pontos da curva $y = \cosh x$ a tangente tem inclinação 1?

56. Se $x = \ln(\sec\theta + \text{tg}\,\theta)$, mostre que $\sec\theta = \cosh x$.

57. Mostre que se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então existem números α e β tais que $ae^x + be^{-x}$ é igual à $\alpha\,\text{senh}(x + \beta)$ ou à $\alpha\cosh(x + \beta)$. Em outras palavras, que quase todas as funções da forma $f(x) = ae^x + be^{-x}$ são funções seno ou cosseno hiperbólicas expandidas e deslocadas.

3 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Enuncie cada regra da derivação tanto em símbolos quanto em palavras.
   (a) A Regra da Potência
   (b) A Regra da Multiplicação por Constante
   (c) A Regra da Soma
   (d) A Regra da Diferença
   (e) A Regra do Produto
   (f) A Regra do Quociente
   (g) A Regra da Cadeia

2. Determine a derivada de cada função.

(a) $y = x^n$	(b) $y = e^x$	(c) $y = a^x$
(d) $y = \ln x$	(e) $y = \log_a x$	(f) $y = \operatorname{sen} x$
(g) $y = \cos x$	(h) $y = \operatorname{tg} x$	(i) $y = \operatorname{cossec} x$
(j) $y = \sec x$	(k) $y = \operatorname{cotg} x$	(l) $y = \operatorname{sen}^{-1}x$
(m) $y = \cos^{-1}x$	(n) $y = \operatorname{tg}^{-1}x$	(o) $y = \operatorname{senh} x$
(p) $y = \cosh x$	(q) $y = \operatorname{tgh} x$	(r) $y = \operatorname{senh}^{-1}x$
(s) $y = \cosh^{-1}x$	(t) $y = \operatorname{tgh}^{-1}x$	

3. (a) Como é definido o número e?
   (b) Expresse e como um limite.
   (c) Por que a função exponencial natural $y = e^x$ é usada mais frequentemente em cálculo do que as outras funções exponenciais $y = a^x$?
   (d) Por que a função logarítmica natural $y = \ln x$ é usada mais frequentemente em cálculo do que as demais funções logarítmicas $y = \log_a x$?

4. (a) Explique como funciona a derivação implícita.
   (b) Explique como funciona a derivação logarítmica.

5. (a) Escreva uma expressão para a linearização de f em a.
   (b) Se $y = f(x)$, escreva uma expressão para a diferencial dy.
   (c) Se $dx = \Delta x$, desenhe uma figura mostrando o significado geométrico de Δy e dy.

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se f e g forem deriváveis, então
$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

2. Se f e g forem deriváveis, então
$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x)$$

3. Se f e g forem diferenciáveis, então
$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

4. Se f for derivável, então $\dfrac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

5. Se f for derivável, então $\dfrac{d}{dx}f(\sqrt{x}) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$.

6. Se $y = e^2$, então $y' = 2e$.

7. $\dfrac{d}{dx}(10^x) = x10^{x-1}$

8. $\dfrac{d}{dx}(\ln 10) = \dfrac{1}{10}$

9. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tg}^2 x) = \dfrac{d}{dx}(\sec^2 x)$

10. $\dfrac{d}{dx}|x^2 + x| = |2x + 1|$

11. Se $g(x) = x^5$, então $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 80$.

12. Uma equação de reta tangente à parábola $y = x^2$ em $(-2, 4)$ é $y - 4 = 2x(x + 2)$.

EXERCÍCIOS

1–50 Calcule y'.

1. $y = (x^4 - 3x^2 + 5)^3$
2. $y = \cos(\operatorname{tg} x)$
3. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$
4. $y = \dfrac{3x - 2}{\sqrt{2x + 1}}$
5. $y = 2x\sqrt{x^2 + 1}$
6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$
7. $y = e^{\operatorname{sen} 2\theta}$
8. $y = e^{-t}(t^2 - 2t + 2)$
9. $y = \dfrac{t}{1 - t^2}$
10. $y = e^{mx}\cos nx$
11. $y = \sqrt{x}\cos\sqrt{x}$
12. $y = (\operatorname{arcsen} 2x)^2$
13. $y = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$
14. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)}$
15. $xy^4 + x^2y = x + 3y$
16. $y = \ln(\operatorname{cossec} 5x)$
17. $y = \dfrac{\sec 2\theta}{1 + \operatorname{tg} 2\theta}$
18. $x^2\cos y + \operatorname{sen} 2y = xy$
19. $y = e^{cx}(c\operatorname{sen} x - \cos x)$
20. $y = \ln(x^2e^x)$
21. $y = 3^{x\ln x}$
22. $y = \sec(1 + x^2)$
23. $y = (1 - x^{-1})^{-1}$
24. $y = 1/\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$
25. $\operatorname{sen}(xy) = x^2 - y$
26. $y = \sqrt{\operatorname{sen}\sqrt{x}}$
27. $y = \log_5(1 + 2x)$
28. $y = (\cos x)^x$
29. $y = \ln\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x$
30. $y = \dfrac{(x^2 + 1)^4}{(2x + 1)^3(3x - 1)^5}$
31. $y = x\operatorname{tg}^{-1}(4x)$
32. $y = e^{\cos x} + \cos(e^x)$
33. $y = \ln|\sec 5x + \operatorname{tg} 5x|$
34. $y = 10^{\operatorname{tg}\pi\theta}$
35. $y = \operatorname{cotg}(3x^2 + 5)$
36. $y = \sqrt{t\ln(t^4)}$
37. $y = \operatorname{sen}\left(\operatorname{tg}\sqrt{1 + x^3}\right)$
38. $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{arcsen}\sqrt{x}\right)$
39. $y\ \operatorname{tg}^2(\operatorname{sen}\theta)$
40. $xe^y = y - 1$
41. $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}(2 - x)^5}{(x + 3)^7}$
42. $y = \dfrac{(x + \lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$
43. $y = x\operatorname{senh}(x^2)$
44. $y = \dfrac{\operatorname{sen} mx}{x}$
45. $y = \ln(\cosh 3x)$
46. $y = \ln\left|\dfrac{x^2 - 4}{2x + 5}\right|$
47. $y = \cosh^{-1}(\operatorname{senh} x)$
48. $y = x\operatorname{tgh}^{-1}\sqrt{x}$
49. $y = \cos\left(e^{\sqrt{\operatorname{tg} 3x}}\right)$
50. $y = \operatorname{sen}^2\left(\cos\sqrt{\operatorname{sen}\pi x}\right)$

51. Se $f(t) = \sqrt{4t + 1}$ encontre $f''(2)$.

52. Se $g(\theta) = \theta\operatorname{sen}\theta$, determine $g''(\pi/6)$.

53. Encontre y'' se $x^6 + y^6 = 1$.

54. Encontre $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = 1/(2 - x)$.

55. Use a indução matemática (página 66) para mostrar que se $f(x) = xe^x$ então $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$.

56. Calcule $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^3}{\operatorname{tg}^3(2t)}$

57–59 Encontre uma equação da tangente à curva no ponto dado.

57. $y = 4\operatorname{sen}^2 x$, $(\pi/6, 1)$

58. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $(0, -1)$

59. $y = \sqrt{1 + 4\operatorname{sen} x}$, $(0, 1)$

60–61 Encontre equações para a reta tangente e para a reta normal à curva no ponto dado.

60. $x^2 + 4xy + y^2 = 13$, $(2, 1)$

61. $y = (2 + x)e^{-x}$, $(0, 2)$

62. Se $f(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$, encontre $f'(x)$. Faça o gráfico de f e f' na mesma tela e comente.

63. (a) Se $f(x) = x\sqrt{5 - x}$, encontre $f'(x)$.
(b) Encontre as equações das retas tangentes à curva $y = x\sqrt{5 - x}$ nos pontos $(1, 2)$ e $(4, 4)$.
(c) Ilustre a parte (b) fazendo o gráfico da curva e das retas tangentes.
(d) Verifique se a resposta da parte (a) é razoável comparando os gráficos de f e f'.

64. (a) Se $f(x) = 4x - \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, encontre f' e f''.
(b) Verifique se as respostas da parte (a) são razoáveis comparando os gráficos de f, f' e f''.

65. Em quais pontos da curva $y = \operatorname{sen} x + \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, a reta tangente é horizontal?

66. Encontre os pontos sobre a elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ onde a reta tangente tem inclinação 1.

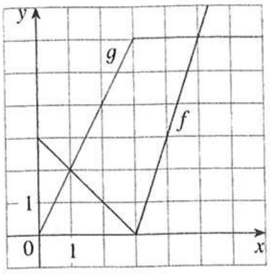
67. Se $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, mostre que
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c}$$

68. (a) Derivando a fórmula do ângulo duplo
$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$
obtenha a fórmula do ângulo duplo para a função seno.
(b) Derivando a fórmula de adição
$$\operatorname{sen}(x + a) = \operatorname{sen} x\cos a + \cos x\operatorname{sen} a$$
obtenha a fórmula de adição para a função cosseno.

69. Suponha que $h(x) = f(x)g(x)$ e $F(x) = f(g(x))$, onde $f(2) = 3$, $g(2) = 5$, $g'(2) = 4$, $f'(2) = -2$ e $f'(5) = 11$. Encontre (a) $h'(2)$ e (b) $F'(2)$.

70. Se f e g forem as funções cujos gráficos estão a seguir, seja $P(x) = f(x)g(x)$, $Q(x) = f(x)/g(x)$ e $C(x) = f(g(x))$.

Encontre (a) $P'(2)$, (b) $Q'(2)$ e (c) $C'(2)$.



71–78 Encontre f' em termos de g'.

71. $f(x) = x^2g(x)$

72. $f(x) = g(x^2)$

73. $f(x) = [g(x)]^2$

74. $f(x) = g(g(x))$

75. $f(x) = g(e^x)$

76. $f(x) = e^{g(x)}$

77. $f(x) = \ln |g(x)|$

78. $f(x) = g(\ln x)$

79–81 Encontre h' em termos de f' e g'.

79. $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)}$

80. $h(x) = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

81. $h(x) = f(g(\text{sen } 4x))$

82. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = x - 2 \text{ sen } x$ na janela retangular $[0, 8]$ por $[-2, 8]$.

(b) Em qual intervalo a taxa de variação média é maior: $[1, 2]$ ou $[2, 3]$?

(c) Em qual valor de x a taxa de variação instantânea é maior: $x = 2$ ou $x = 5$?

(d) Verifique sua estimativa visual na parte (c) calculando $f'(x)$ e comparando os valores numéricos de $f'(2)$ e $f'(5)$.

83. Em qual ponto sobre a curva $y = [\ln(x + 4)]^2$ a reta tangente é horizontal?

84. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = e^x$ que seja paralela à reta $x - 4y = 1$.

(b) Encontre uma equação da tangente à curva $y = e^x$ que passe pela origem.

85. Encontre uma parábola $y = ax^2 + bx + c$ que passe pelo ponto $(1, 4)$ e cujas retas tangentes em $x = -1$ e $x = 5$ tenham inclinações 6 e -2, respectivamente.

86. A função $C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$, onde a, b e K são constantes positivas e $b > a$, é usada para modelar a concentração de uma droga injetada na corrente sanguínea no instante t.

(a) Mostre que $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$.

(b) Encontre $C'(t)$, a taxa segundo a qual a droga é eliminada da circulação.

(c) Quando essa taxa é igual a zero?

87. Uma equação de movimento da forma $s = Ae^{-ct}\cos(\omega t + \delta)$ representa uma oscilação amortecida de um objeto. Encontre a velocidade e a aceleração do objeto.

88. Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal de forma que sua coordenada no instante t seja $x = \sqrt{b^2 + c^2t^2}$, $t \geqslant 0$, onde b e c são constantes positivas.

(a) Encontre as funções velocidade e aceleração.

(b) Mostre que a partícula se move sempre no sentido positivo.

89. Uma partícula se move sobre uma reta vertical de forma que sua coordenada no instante t seja $y = t^3 - 12t + 3$, $t \geqslant 0$.

(a) Encontre as funções velocidade e aceleração.

(b) Quando a partícula se move para cima? E para baixo?

(c) Encontre a distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo $0 \leqslant t \leqslant 3$.

(d) Trace as funções posição, velocidade e aceleração para $0 \leqslant t \leqslant 3$.

(e) Quando a partícula está acelerando? Quando está freando?

90. O volume de um cone circular reto é $V = \pi r^2h/3$, onde r é o raio da base e h é a altura.

(a) Encontre a taxa de variação do volume em relação à altura se o raio for mantido constante.

(b) Encontre a taxa de variação do volume em relação ao raio se a altura for mantida constante.

91. A massa de parte de um fio é $x(1 + \sqrt{x})$ kg, onde x é medido em metros a partir de uma extremidade do fio. Encontre a densidade linear do fio quando $x = 4$ m.

92. O custo, em dólares, da produção de x unidades de um certo bem é

$$C(x) = 920 + 2x - 0{,}02x^2 + 0{,}00007x^3$$

(a) Encontre a função custo marginal.

(b) Encontre $C'(100)$ e explique seu significado.

(c) Compare $C'(100)$ com o custo da produção do 101º item.

93. Uma cultura de bactérias contém inicialmente 200 células e cresce a uma taxa proporcional a seu tamanho. Depois de meia hora a população aumentou para 360 células.

(a) Encontre o número de bactérias depois de t horas.

(b) Encontre o número de bactérias depois de 4 horas.

(c) Encontre a taxa de crescimento depois de 4 horas.

(d) Quando a população atingirá 10 000?

94. O cobalto-60 tem a meia-vida de 5,24 anos.

(a) Encontre a massa remanescente de uma amostra de 100 mg depois de 20 anos.

(b) Quanto tempo levaria para a massa decair para 1 mg?

95. Seja $C(t)$ a concentração de uma droga na corrente sanguínea. À medida que o corpo elimina a droga, $C(t)$ diminui a uma taxa que é proporcional à quantidade da droga presente naquele instante. Assim, $C'(t) = -kC(t)$, em que k é um número positivo chamado *constante de eliminação* da droga.

(a) Se C_0 for a concentração no instante $t = 0$, encontre a concentração no instante t.

(b) Se o corpo eliminar a metade da droga em 30 horas, quanto tempo levará para eliminar 90% da droga?

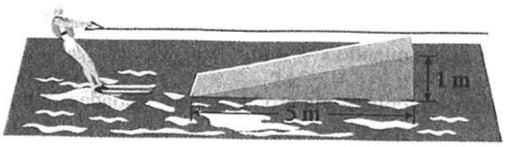
96. Uma xícara de chocolate quente tem a temperatura de 80 °C em uma sala mantida a 20 °C. Depois de meia hora, o chocolate quente esfriou para 60 °C.
(a) Qual a temperatura do chocolate depois de mais meia hora?
(b) Quando o chocolate terá esfriado para 40 °C?

97. O volume de um cubo cresce a uma taxa de 10 cm^3/min. Com que rapidez estará crescendo sua área quando o comprimento de uma das arestas for 30 cm?

98. Um copo de papel tem a forma de um cone com 10 cm de altura e 3 cm de raio (no topo). Se for colocada água dentro do copo a uma taxa de 2 cm^3/s, com que rapidez o nível da água se elevará quando ela tiver 5 cm de profundidade?

99. Um balão sobe a uma velocidade constante de 2 m/s e um rapaz anda de bicicleta ao longo de uma estrada reta a uma velocidade de 5 m/s. Ao passar sobre o ciclista o balão está 15 m acima dele. Com que velocidade cresce a distância entre o balão e o rapaz 3 segundos mais tarde?

100. Uma esquiadora aquática sobe a rampa mostrada na figura a uma velocidade de 10 m/s. Com que velocidade ela estará subindo quando deixar a rampa?



101. O ângulo de elevação do Sol está decrescendo a uma taxa de 0,25 rad/h. Com que velocidade está crescendo a sombra de um prédio de 400 metros de altura quando o ângulo de elevação do Sol é $\pi/6$?

102. (a) Encontre a aproximação linear para $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ nas proximidades de 3.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico de f e da aproximação linear.
(c) Para quais valores de x a aproximação linear tem precisão de 0,1?

103. (a) Encontre a linearização de $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x}$ em $a = 0$. Determine a aproximação linear correspondente e use-a para dar um valor aproximado de $\sqrt[3]{1{,}03}$.
(b) Determine os valores de x para os quais a aproximação linear dada na parte (a) tem precisão de 0,1.

104. Calcule dy se $y = x^3 - 2x^2 + 1$, $x = 2$ e $dx = 0{,}2$.

105. Uma janela tem o formato de um quadrado com um semicírculo em cima. A base da janela mede 60 cm com um possível erro na medida de 0,1 cm. Use as diferenciais para estimar o máximo erro possível no cálculo da área da janela.

106–108 Expresse o limite como uma derivada e calcule-o.

106. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{17} - 1}{x - 1}$

107. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

108. $\lim\limits_{\theta \to \pi/3} \dfrac{\cos\theta - 0{,}5}{\theta - \pi/3}$

109. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}{x^3}$.

110. Suponha que f seja uma função derivável tal que $f(g(x)) = x$ e $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$. Mostre que $g'(x) = 1/(1 + x^2)$.

111. Encontre $f'(x)$ sabendo-se que

$$\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$$

112. Mostre que o comprimento da parte de qualquer reta tangente à astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ cortada pelos eixos coordenados é constante.

Antes de você olhar todo o exemplo, cubra a solução e tente resolvê-lo sozinho.

EXEMPLO 1 Quantas retas são tangentes a ambas as parábolas $y = -1 - x^2$ e $y = 1 + x^2$? Encontre as coordenadas dos pontos nos quais essas tangentes tocam as parábolas.

SOLUÇÃO É essencial fazer o diagrama para este problema. Assim, esboçamos as parábolas $y = 1 + x^2$ (que é a parábola-padrão $y = x^2$ deslocada uma unidade para cima) e $y = -1 - x^2$ (obtida refletindo-se a primeira parábola em torno do eixo x). Se tentarmos traçar uma reta tangente a ambas as parábolas, logo descobriremos que existem somente duas possibilidades, conforme ilustrado na Figura 1.

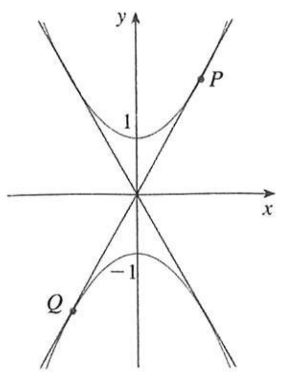


FIGURA 1

Seja P um ponto no qual uma dessas tangentes toca a parábola de cima e seja a sua coordenada x. (A escolha de notação para a incógnita é importante. Naturalmente, poderíamos ter usado b, c, x_0 ou x_1 em vez de a. Contudo, não é recomendável usar x no lugar de a, pois ele poderia ser confundido com a variável x da equação da parábola.) Então, uma vez que P está sobre a parábola $y = 1 + x^2$, sua coordenada y deve ser $1 + a^2$. Em virtude da simetria mostrada na Figura 1, as coordenadas do ponto Q onde a tangente toca a parábola de baixo devem ser $(-a, -(1 + a^2))$.

Para usar a informação dada de que a reta é uma tangente, equacionamos a inclinação da reta PQ como a inclinação da reta tangente em P. Temos que

$$m_{PQ} = \frac{1 + a^2 - (-1 - a^2)}{a - (-a)} = \frac{1 + a^2}{a}$$

Se $f(x) = 1 + x^2$, então a inclinação da reta tangente em P é $f'(a) = 2a$. Dessa forma, a condição que precisamos usar é

$$\frac{1 + a^2}{a} = 2a$$

Resolvendo essa equação, obtemos $1 + a^2 = 2a^2$, logo $a^2 = 1$ e $a = \pm 1$. Portanto, os pontos são $(1, 2)$ e $(-1, -2)$. Por simetria, os pontos remanescentes são $(-1, 2)$ e $(1, -2)$. □

EXEMPLO 2 Para quais valores de c a equação $\ln x = cx^2$ tem exatamente uma solução?

SOLUÇÃO Um dos princípios mais importantes na resolução de problemas é fazer um diagrama, mesmo que o problema dado não mencione explicitamente uma situação geométrica. O presente problema pode ser reformulado geometricamente da seguinte forma: para quais valores de c a curva $y = \ln x$ intercepta a curva $y = cx^2$ em exatamente um ponto?

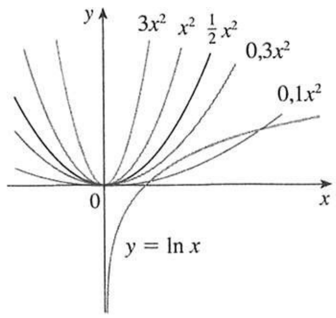


FIGURA 2

Vamos começar fazendo os gráficos de $y = \ln x$ e $y = cx^2$ para os diversos valores de c. Sabemos que, para $c \neq 0$, $y = cx^2$ é uma parábola que se abre para cima se $c > 0$ e para baixo se $c < 0$. A Figura 2 mostra as parábolas $y = cx^2$ para vários valores positivos de c. A maior parte delas não intercepta $y = \ln x$, e uma intercepta duas vezes. Suspeitamos que deve haver um valor de c (em algum lugar entre 0,1 e 0,3) para o qual as curvas se interceptam exatamente uma vez, como na Figura 3.

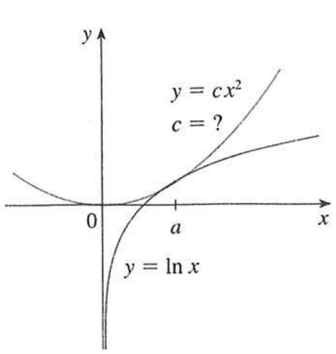


FIGURA 3

Para encontrar aquele valor particular de c, seja a a coordenada x do único ponto de intersecção. Em outras palavras, $\ln a = ca^2$, e a é a única solução para a equação dada. Vemos a partir da Figura 3 que as curvas somente se tocam, portanto têm uma reta tangente comum quando $x = a$. Isso significa que as curvas $y = \ln x$ e $y = cx^2$ têm a mesma inclinação quando $x = a$. Logo,

$$\frac{1}{a} = 2ca$$

Resolvendo as equações $\ln a = ca^2$ e $1/a = 2ca$, obtemos

$$\ln a = ca^2 = c \cdot \frac{1}{2c} = \frac{1}{2}$$

Assim, $a = e^{1/2}$e

$$c = \frac{\ln a}{a^2} = \frac{\ln e^{1/2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

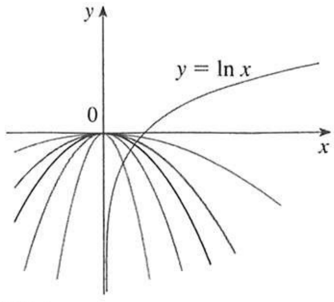


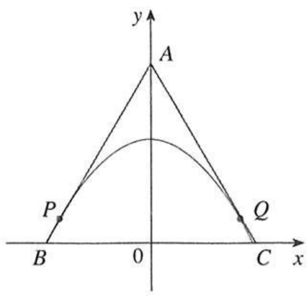
FIGURA 4

Para os valores negativos de c temos a situação ilustrada na Figura 4: todas as parábolas $y = cx^2$ com os valores negativos de c interceptam $y = \ln x$ exatamente uma vez. E não devemos esquecer de $c = 0$: a curva $y = 0x^2 = 0$ é tão-somente o eixo x, que intercepta $y = \ln x$ exatamente uma vez.

Resumindo, os valores pedidos de c são $c = 1/(2e)$ e $c \leqslant 0$. □

PROBLEMAS

1. Encontre os pontos P e Q sobre a parábola $y = 1 - x^2$ de forma que o triângulo ABC formado pelo eixo x e pelas retas tangentes em P e Q seja equilátero.



2. Encontre o ponto onde as curvas $y = x^3 - 3x + 4$ e $y = 3(x^2 - x)$ são tangentes uma à outra, isto é, têm uma reta tangente comum. Ilustre esboçando as curvas e a tangente em comum.

3. Mostre que as retas tangentes à parábola $y = ax^2 + bx + c$ em quaisquer dois pontos com coordenadas x dadas por p e q devem se interceptar em um ponto cuja coordenada x está no ponto médio de p e q.

4. Mostre que
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{cotg} x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}\right) = -\cos 2x$$

5. Mostre que $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{tgh} x) = \operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{senh} x)$.

6. Um carro viaja à noite em uma estrada com formato de uma parábola com seu vértice na origem. O carro começa em um ponto a 100 m a oeste e 100 m ao norte da origem e viaja na direção leste. A 100 m a leste e a 50 m ao norte da origem existe uma estátua. Em que ponto da estrada os faróis do carro vão iluminar a estátua?

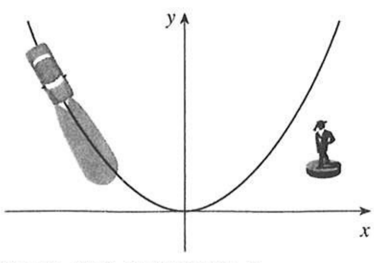
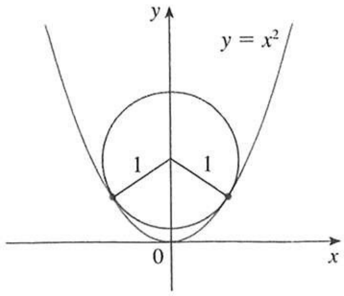


FIGURA PARA O PROBLEMA 6

7. Demonstre que $\dfrac{d^n}{dx^n}(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x) = 4^{n-1}\cos(4x + n\pi/2)$.

8. Encontre a n-ésima derivada da função $f(x) = x^n/(1 - x)$.

9. A figura mostra um círculo de raio 1 inscrito na parábola $y = x^2$. Encontre o centro do círculo.



10. Se f for derivável em a, onde $a > 0$, calcule o seguinte limite em termos de $f'(a)$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

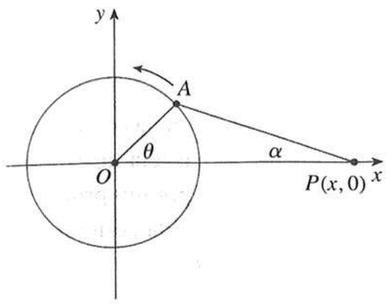


FIGURA PARA O PROBLEMA 11

11. A figura mostra uma roda de raio 40 cm que gira e uma barra de conexão AP com o comprimento 1,2 m. O pino P pode escorregar para a frente e para trás ao longo do eixo x à medida que a roda gira no sentido anti-horário a uma taxa de 360 revoluções por minuto.

(a) Encontre a velocidade angular da barra de conexão, $d\alpha/dt$, em radianos por segundo, quando $\theta = \pi/3$.

(b) Expresse a distância $x = |OP|$ em termos de θ.

(c) Encontre uma expressão para a velocidade do pino P em termos de θ.

12. As retas tangentes T_1 e T_2 são traçadas em dois pontos P_1 e P_2 na parábola $y = x^2$ e se interceptam em um ponto P. Outra reta tangente T é traçada em um ponto entre P_1 e P_2, e intercepta T_1 em Q_1 e T_2 em Q_2. Mostre que

$$\frac{|PQ_1|}{|PP_1|} + \frac{|PQ_2|}{|PP_2|} = 1$$

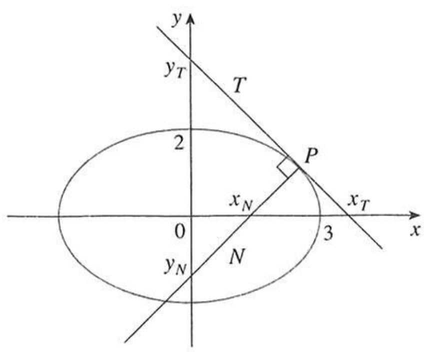
13. Mostre que

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax} \operatorname{sen} bx) = r^n e^{ax} \operatorname{sen}(bx + n\theta)$$

onde a e b são números positivos, $r^2 = a^2 + b^2$, e $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(b/a)$.

14. Calcule $\lim_{x \to \pi} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{x - \pi}$.

15. Sejam T e N as retas tangente e normal à elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$ em um ponto qualquer P sobre a elipse, no primeiro quadrante. Sejam x_T e y_T as itersecções com o eixo x e y de T e x_N e y_N as intersecções de N. À medida que P se move ao longo da elipse no primeiro quadrante (mas sem estar nos eixos), que valores podem assumir x_T, y_T, x_N e y_N? Tente primeiro conjecturar a resposta somente olhando na figura. Então, use o cálculo para resolver o problema e veja quão boa está sua intuição.



16. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3 + x)^2 - \operatorname{sen} 9}{x}$.

17. (a) Use a identidade para $\operatorname{tg}(x - y)$ (veja a Equação 14b do Apêndice D) para mostrar que, se duas retas L_1 e L_2 se interceptam com um ângulo α, então

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 - m_1 m_2}$$

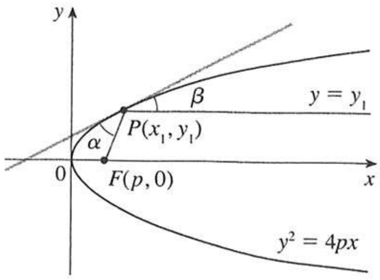
em que m_1 e m_2 são as inclinações de L_1 e L_2, respectivamente.

(b) O **ângulo entre as curvas** C_1 e C_2 em um ponto de intersecção P é definido como o ângulo entre as retas tangentes a C_1 e C_2 em P (se existirem). Use a parte (a) para encontrar, com precisão de um grau, o ângulo entre cada par de curvas em cada ponto de intersecção.

(i) $y = x^2$ e $y = (x - 2)^2$

(ii) $x^2 - y^2 = 3$ e $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$

18. Seja $P(x_1, y_1)$ um ponto sobre a parábola $y^2 = 4px$ com foco $F(p, 0)$. Seja α o ângulo entre a parábola e o segmento de reta FP e seja β o ângulo entre a reta horizontal $y = y_1$ e a parábola, como na figura. Demonstre que $\alpha = \beta$. (Assim, por um princípio da óptica geométrica, a luz de uma fonte localizada em F será refletida ao longo de uma reta paralela ao eixo x. Isso explica por que os *paraboloides*, superfícies obtidas por rotações de parábolas sobre seus eixos, são usados como forma de alguns faróis de automóveis e espelhos para os telescópios.)



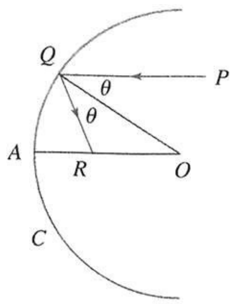


FIGURA PARA O PROBLEMA 19

19. Suponhamos que o espelho parabólico do Problema 18 tenha sido substituído por um esférico. Embora o espelho não tenha foco, podemos mostrar a existência de um foco *aproximado*. Na figura, C é um semicírculo com centro O. O raio de luz vindo na direção do espelho, paralelo ao eixo, ao longo da reta PQ será refletido para o ponto R sobre o eixo, de modo que $\angle PQO = \angle OQR$ (o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão). O que acontecerá ao ponto R se P for tomado cada vez mais próximo do eixo?

20. Se f e g forem funções diferenciáveis com $f(0) = g(0) = 0$ e $g'(0) \neq 0$, mostre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

21. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(a + 2x) - 2\operatorname{sen}(a + x) + \operatorname{sen} a}{x^2}$.

SCA **22.** (a) A função cúbica $f(x) = x(x - 2)(x - 6)$ tem três raízes distintas: 0, 2 e 6. Faça o gráfico da f e de suas retas tangentes nos pontos *médios* de cada par de zeros. O que você percebe?

(b) Suponha que a função cúbica $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ tenha três zeros distintos: a, b e c. Demonstre, usando um sistema de computação algébrica, que a reta tangente ao gráfico de f no ponto médio dos dois zeros a e b intercepta o gráfico da f no terceiro zero.

23. Para quais valores de k a equação $e^{2x} = k\sqrt{x}$ tem exatamente uma solução?

24. Para quais números positivos a é verdadeiro que $a^x \geqslant 1 + x$ para todo x?

25. Se

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} x}{a + \sqrt{a^2 - 1} + \cos x}$$

mostre que $y' = \dfrac{1}{a + \cos x}$.

26. Dada uma elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, em que $a \neq b$, encontre a equação do conjunto de todos os pontos para os quais existem duas tangentes à curva cujas inclinações são (a) recíprocas e (b) recíprocas negativas.

27. Encontre os dois pontos sobre a curva $y = x^4 - 2x^2 - x$ que têm uma reta tangente comum.

28. Suponha que três pontos sobre a parábola $y = x^2$ têm a seguinte propriedade: suas retas normais se interceptam em um ponto comum. Mostre que a soma de suas coordenadas x é 0.

29. Um *ponto de rede* no plano é um ponto com coordenadas inteiras. Suponha que círculos com raio r sejam feitos usando-se todos os pontos de rede como centros. Encontre o menor valor de r para o qual toda reta com inclinação $\frac{2}{5}$ intercepta alguns desses círculos.

30. Um cone de raio r centímetros e altura h centímetros é submerso a uma taxa de 1 cm/s, primeiro a ponta, em um cilindro alto, com raio R cm, parcialmente cheio de água. Com que velocidade se elevará o nível de água no instante em que o cone fica completamente submerso?

31. Um recipiente com a forma de um cone invertido tem 16 cm de altura e 5 cm de raio no topo. Ele está parcialmente cheio com um líquido que vaza pelos lados a uma taxa proporcional à área do recipiente que está em contato com o líquido. (A área de um cone é $\pi r l$, na qual r é o raio e l é o comprimento da geratriz.) Se estivermos derramando líquido no recipiente a uma taxa de 2 cm^3/min, então a altura do líquido decrescerá a uma taxa de 0,3 cm/min quando a altura for 10 cm. Se nosso objetivo for manter constante a altura do líquido em 10 cm, a que taxa deveríamos derramar líquido no recipiente?