2.1 EXERCÍCIOS

1. Um tanque com capacidade para 1 000 litros de água é drenado pela base em meia hora. Os valores na tabela mostram o volume V de água remanescente no tanque (em litros) após t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (L)	694	444	250	111	28	0

(a) Se P é o ponto $(15, 250)$ sobre o gráfico de V, encontre as inclinações das retas secantes PQ, onde Q é o ponto sobre o gráfico correspondente a $t = 5, 10, 20, 25$ e 30.

(b) Estime a inclinação da reta tangente em P pela média das inclinações de duas retas secantes.

(c) Use o gráfico da função para estimar a inclinação da reta tangente em P. (Essa inclinação representa a taxa segundo a qual a água escoa do tanque após 15 minutos.)

2. Um monitor é usado para medir os batimentos cardíacos de um paciente após uma cirurgia. Ele fornece um número de batimentos cardíacos após t minutos. Quando os dados na tabela são colocados em um gráfico, a inclinação da reta tangente representa a taxa de batimentos cardíacos por minuto.

t (min)	36	38	40	42	44
Batimentos cardíacos	2 530	2 661	2 806	2 948	3 080

O monitor estima esse valor calculando a inclinação de uma reta secante. Use os dados para estimar a taxa de batimentos cardíacos após 42 minutos, utilizando a reta secante entre os pontos para os valores de t dados.

(a) $t = 36$ e $t = 42$ (b) $t = 38$ e $t = 42$

(c) $t = 40$ e $t = 42$ (d) $t = 42$ e $t = 44$

Quais são suas conclusões?

3. O ponto $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ pertence à curva $y = x/(1 + x)$.

(a) Se Q é o ponto $(x, x/(1 + x))$, use sua calculadora para determinar a inclinação da reta secante PQ, com precisão de seis casas decimais, para os seguintes valores de x:

(i) 0,5 (ii) 0,9 (iii) 0,99 (iv) 0,999

(v) 1,5 (vi) 1,1 (vii) 1,01 (viii) 1,001

(b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

(c) Utilize a inclinação obtida na parte (b) para achar uma equação da reta tangente à curva em $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

4. O ponto $P(3, 1)$ pertence à curva $y = \sqrt{x - 2}$.

(a) Se Q é o ponto $(x, \sqrt{x - 2})$, use sua calculadora para determinar a inclinação da reta secante PQ, com precisão de seis casas decimais, para os seguintes valores de x:

(i) 2,5 (ii) 2,9 (iii) 2,99 (iv) 2,999

(v) 3,5 (vi) 3,1 (vii) 3,01 (viii) 3,001

(b) Usando os resultados da parte (a), estime o valor da inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(3, 1)$.

(c) Use a inclinação obtida na parte (b) para achar uma equação da reta tangente à curva em $P(3, 1)$.

(d) Esboce a curva, duas das retas secantes e a reta tangente.

5. Uma bola é atirada no ar com velocidade de 10 m/s. Sua altura em metros após t segundos é dada por $y = 10t - 4{,}9t^2$.

(a) Encontre a velocidade média para o período de tempo que começa quando $t = 1{,}5$ e dura

(i) 0,5 s (ii) 0,1 s

(iii) 0,05 s (iv) 0,01 s

(b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1{,}5$.

6. Se uma pedra for jogada para cima no planeta Marte com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) t segundos mais tarde é dada por $y = 10t - 1{,}86t^2$.

(a) Encontre a velocidade média entre os intervalos de tempo dados:

(i) $[1, 2]$ (ii) $[1, 1{,}5]$ (iii) $[1, 1{,}1]$

(iv) $[1, 1{,}01]$ (v) $[1, 1{,}001]$

(b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1$.

7. A tabela mostra a posição de um ciclista.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	0	1,4	5,1	10,7	17,7	25,8

(a) Encontre a velocidade média nos períodos de tempo a seguir:

(i) $[1, 3]$ (ii) $[2, 3]$ (iii) $[3, 5]$ (iv) $[3, 4]$

(b) Use o gráfico de s como uma função de t para estimar a velocidade instantânea quando $t = 3$.

8. O deslocamento (em centímetros) de uma partícula se movendo para frente e para trás ao longo de uma reta é dado pela equação de movimento $s = 2 \operatorname{sen} \pi t + 3 \cos \pi t$, em que t é medido em segundos.

(a) Encontre a velocidade média em cada período de tempo:

(i) $[1, 2]$ (ii) $[1, 1{,}1]$

(iii) $[1, 1{,}01]$ (iv) $[1, 1{,}001]$

(b) Estime a velocidade instantânea da partícula quando $t = 1$.

9. O ponto $P(1, 0)$ está sobre a curva $y = \operatorname{sen}(10\pi/x)$.

(a) Se Q for o ponto $(x, \operatorname{sen}(10\pi/x))$, encontre a inclinação da reta secante PQ (correta até a quarta casa decimal) para $x = 2; 1{,}5; 1{,}4; 1{,}3; 1{,}2; 1{,}1; 0{,}5; 0{,}6; 0{,}7; 0{,}8$ e $0{,}9$. As inclinações parecem tender a um limite?

(b) Use um gráfico da curva para explicar por que as inclinações das retas secantes da parte (a) não estão próximas da inclinação da reta tangente em P.

(c) Escolhendo as retas secantes apropriadas, estime a inclinação da reta tangente em P.

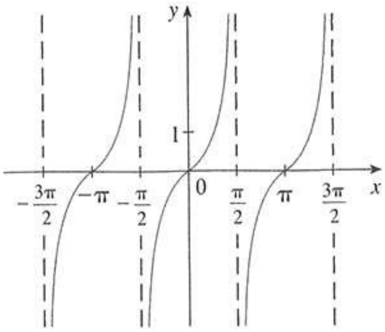


FIGURA 16
$y = \text{tg}\, x$

EXEMPLO 10 Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \text{tg}\, x$.

SOLUÇÃO Como

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$$

existem assíntotas verticais em potencial nos pontos nos quais $\cos x = 0$. De fato, como $\cos x \to 0^+$ quando $x \to (\pi/2)^-$ e $\cos x \to 0^-$ quando $x \to (\pi/2)^+$, enquanto sen x é positivo quando x está próximo de $\pi/2$, temos

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \text{tg}\, x = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to (\pi/2)^+} \text{tg}\, x = -\infty$$

Isso mostra que a reta $x = \pi/2$ é uma assíntota vertical. Um raciocínio análogo mostra que as retas $x = (2n + 1)\pi/2$, onde n é um inteiro, são todas assíntotas verticais de $f(x) = \text{tg}\, x$. O gráfico da Figura 16 confirma isso. □

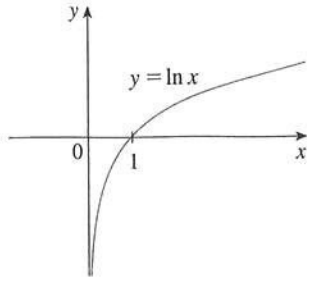


FIGURA 17
O eixo y é uma assíntota vertical da função logaritmo natural

Outro exemplo de uma função cujo gráfico tem uma assíntota vertical é a função logaritmo natural $y = \ln x$. Da Figura 17 vemos que

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$$

e assim a reta $x = 0$ (o eixo y) é uma assíntota vertical. Na realidade, isso é válido para $y = \log_a x$ desde que $a > 1$. (Veja as Figuras 11 e 12 na Seção 1.6.)

2.2 EXERCÍCIOS

1. Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique o que significa dizer que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

Nesta situação, é possível que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Explique.

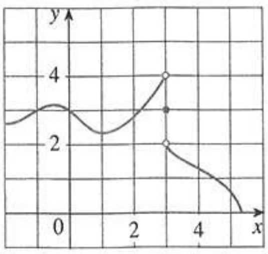
3. Explique o significado de cada uma das notações a seguir.

(a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

4. Para a função f, cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

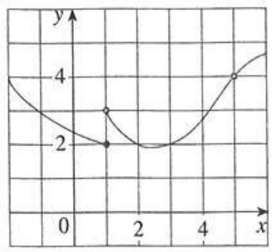
(d) $\lim_{x \to 3} f(x)$ (e) $f(3)$



5. Use o gráfico dado da função f para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 5} f(x)$ (e) $f(5)$



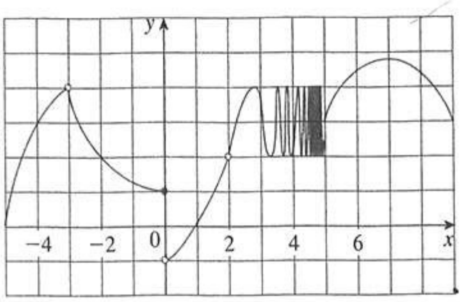
6. Para a função h cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x \to -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x \to -3} h(x)$

(d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x \to 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$

(g) $\lim_{x \to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x \to 2} h(x)$

(j) $h(2)$ (k) $\lim_{x \to 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x \to 5^-} h(x)$

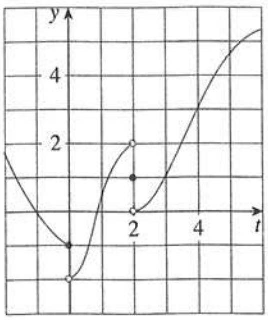


7. Para a função g cujo gráfico é dado, diga o valor da cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{t\to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t\to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t\to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t\to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t\to 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t\to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim_{t\to 4} g(t)$

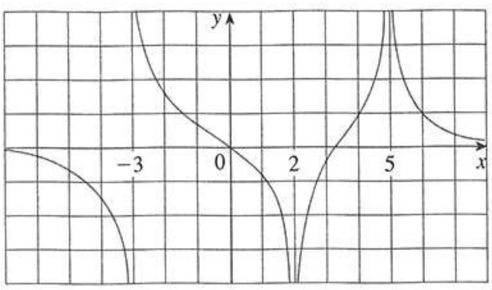


8. Para a função R cujo gráfico é mostrado a seguir, diga quem são:

(a) $\lim_{x\to 2} R(x)$ (b) $\lim_{x\to 5} R(x)$

(c) $\lim_{x\to -3^-} R(x)$ (d) $\lim_{x\to -3^+} R(x)$

(e) As equações das assíntotas verticais.

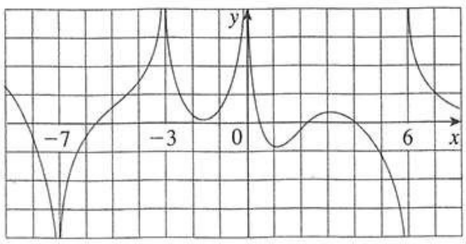


9. Para a função f cujo gráfico é mostrado a seguir, diga quem são:

(a) $\lim_{x\to -7} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -3} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 6^-} f(x)$ (e) $\lim_{x\to 6^+} f(x)$

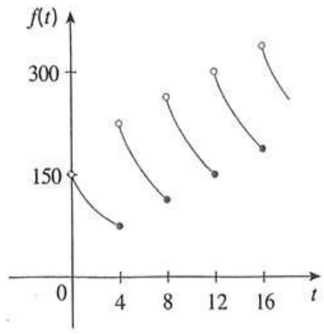
(f) As equações das assíntotas verticais.



10. Um paciente recebe uma injeção de 150 mg de uma droga a cada 4 horas. O gráfico mostra a quantidade $f(t)$ da droga na corrente sanguínea após t horas. (Posteriormente poderemos calcular a dosagem e intervalos de tempo que garantam que a concentração da droga não atinja níveis perigosos.) Encontre

$$\lim_{t\to 12^-} f(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 12^+} f(t)$$

e explique o significado desses limites laterais.



11. Use o gráfico da função $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$ para dizer o valor de cada limite, se existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

12. Esboce o gráfico da função a seguir e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x\to a} f(x)$ existe:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x < -1 \\ x & \text{se } -1 \leqslant x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

13–16 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça todas as condições dadas.

13. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -2, \quad f(1) = 2,$

14. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0,$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(0)$ não está definida

15. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to -2} f(x) = 2,$

$f(3) = 3, \quad f(-2) = 1$

16. $\lim_{x\to 1} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to 4^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to 4^+} f(x) = -3,$

$f(1) = 1, \quad f(4) = -1$

17–20 Faça uma conjectura sobre o valor do limite (se ele existir) por meio dos valores da função nos números dados (com precisão de seis casas decimais).

17. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$, $x = 2{,}5, 2{,}1, 2{,}05, 2{,}01, 2{,}005, 2{,}001,$

$1{,}9, 1{,}95, 1{,}99, 1{,}995, 1{,}999$

18. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$,

$x = 0, -0{,}5\ -0{,}9, -0{,}95, -0{,}99, -0{,}999, -2, -1{,}5, -1{,}1, -1{,}01, -1{,}001$

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$, $x = \pm 1, \pm 0{,}5, \pm 0{,}1, \pm 0{,}05, \pm 0{,}01$

20. $\lim_{x\to 0^+} x \ln(x + x^2)$, $x = 1, 0{,}5, 0{,}1, 0{,}05, 0{,}01, 0{,}005, 0{,}001$

21–24 Use uma tabela de valores para estimar o valor do limite. Se você tiver alguma ferramenta gráfica, use-a para confirmar seu resultado.

21 $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

22. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$

23. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$

24. $\lim_{x \to 0} \dfrac{9^x - 5^x}{x}$

25–32 Determine o limite infinito.

25. $\lim_{x \to 5^+} \dfrac{6}{x-5}$

26. $\lim_{x \to 5^-} \dfrac{6}{x-5}$

27. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2-x}{(x-1)^2}$

28. $\lim_{x \to 5^-} \dfrac{e^x}{(x-5)^3}$

29. $\lim_{x \to -2^+} \dfrac{x-1}{x^2(x+2)}$

30. $\lim_{x \to \pi^-} \operatorname{cossec} x$

31. $\lim_{x \to (-\pi/2)^-} \sec x$

32. $\lim_{x \to 5^+} \ln(x-5)$

33. Determine $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x^3 - 1}$ e $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^3 - 1}$

(a) calculando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para valores de x que tendem a 1 pela esquerda e direita,

(b) raciocinando como no Exemplo 9, e

(c) a partir do gráfico de f.

34. (a) Encontre as assíntotas verticais da função

$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$

(b) Confirme sua resposta da parte (a) fazendo o gráfico da função.

35. (a) Estime o valor do limite $\lim_{x \to 0}(1 + x)^{1/x}$ com cinco casas decimais. Esse número lhe parece familiar?

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da função $y = (1 + x)^{1/x}$.

36. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\operatorname{tg} 4x)/x$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y, estime o valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$.

(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que tendam a 0.

37. (a) Calcule a função $f(x) = x^2 - (2^x/1\,000)$ para $x = 1$, 0,8, 0,6, 0,4, 0,2, 0,1 e 0,05 e faça uma conjectura sobre o valor de

$$\lim_{x \to 0}\left(x^2 - \frac{2^x}{1\,000}\right)$$

(b) Calcule $f(x)$ para $x = 0{,}04$, 0,02, 0,01, 0,005, 0,003 e 0,001. Faça uma nova conjectura.

38. (a) Calcule $h(x) = (\operatorname{tg} x - x)/x^3$ para $x = 1$, 0,5, 0,1, 0,05, 0,01 e 0,005.

(b) Conjecture qual o valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$.

(c) Calcule $h(x)$ para valores sucessivamente menores de x até finalmente atingir valor 0 para $h(x)$. Você ainda está confiante que a conjectura em (b) está correta? Explique por que você acaba obtendo o valor 0. (Na Seção 4.4 veremos um método para calcular esse limite.)

(d) Faça o gráfico da função h na janela retangular $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Dê então um *zoom* na direção do ponto onde o gráfico corta o eixo y para estimar o limite de $h(x)$ quando x tende a 0. Continue dando *zoom* até observar distorções no gráfico de h. Compare com os resultados da parte (c).

39. Faça o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ do Exemplo 4 na janela retangular $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Então dê um *zoom* em direção à origem diversas vezes. Comente o comportamento dessa função.

40. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

em que m_0 é a massa da partícula em repouso e c, a velocidade da luz. O que acontece se $v \to c^-$?

41. Use um gráfico para estimar as equações de todas as assíntotas verticais da curva

$$y = \operatorname{tg}(2 \operatorname{sen} x) \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

Encontre, então, as equações exatas dessas assíntotas.

42. (a) Use evidências numéricas e gráficas para fazer uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

(b) A que distância de 1 deverá estar x para garantir que a função da parte (a) esteja a uma distância de 0,5 de seu limite?

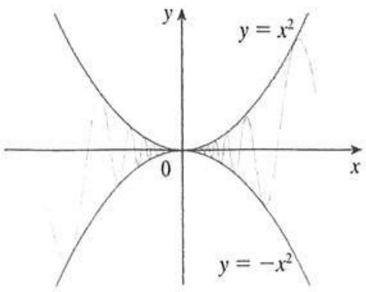


FIGURA 8

porque $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ não existe (veja o Exemplo 4 da Seção 2.2). Porém, como

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant 1$$

temos, conforme está ilustrado na Figura 8,

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant x^2$$

Sabemos que

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$

Tomando-se $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, e $h(x) = x^2$ no Teorema de Confronto obtém-se

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

□

2.3 EXERCÍCIOS

1. Dado que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 2} h(x) = 0$$

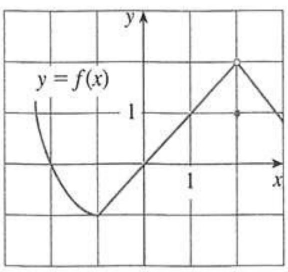
encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

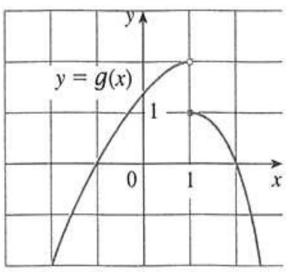
(a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 2} [g(x)]^3$

(c) $\lim_{x \to 2} \sqrt{f(x)}$ (d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Os gráficos de f e g são dados. Use-os para calcular cada limite. Caso não exista o limite, explique por quê.





(a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 1} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x \to 0} [f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x \to 2} [x^3 f(x)]$ (f) $\lim_{x \to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

3–9 Calcule o limite justificando cada passagem com as Propriedades dos Limites que forem usadas.

3. $\lim_{x \to 4} (5x^2 - 2x + 3)$

4. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x - 2}{x^2 + 4x - 3}$

5. $\lim_{x \to 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

6. $\lim_{t \to -1} (t^2 + 1)^3 (t + 3)^5$

7. $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{1 + 3x}{1 + 4x^2 + 3x^4} \right)^3$

8. $\lim_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

9. $\lim_{x \to 4^-} \sqrt{16 - x^2}$

10. (a) O que há de errado com a equação a seguir?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) Em vista de (a), explique por que a equação

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 3)$$

está correta.

11–30 Calcule o limite, se existir.

11. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

12. $\lim_{x \to -4} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

13. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

14. $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{t \to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

17. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(4 + h)^2 - 16}{h}$

18. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

19. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

21. $\lim_{t \to 9} \dfrac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$

22. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

23. $\lim_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$

24. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

25. $\displaystyle\lim_{x \to -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$

26. $\displaystyle\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t} \right)$

27. $\displaystyle\lim_{x \to 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$

28. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

29. $\displaystyle\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \frac{1}{t} \right)$

30. $\displaystyle\lim_{x \to -4} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

31. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

fazendo o gráfico da função $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$.

(b) Faça uma tabela de valores de $f(x)$ para x próximo de 0 e conjecture qual será o valor do limite.

(c) Use as Propriedades dos Limites para mostrar que sua conjectura está correta.

32. (a) Use o gráfico de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar o valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$ com duas casas decimais.

(b) Utilize uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com quatro casas decimais.

(c) Use as Propriedades dos Limites para encontrar o valor exato do limite.

33. Use o Teorema do Confronto para mostrar que $\lim_{x \to 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0$. Ilustre, fazendo os gráficos, na mesma tela, das funções $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ e $h(x) = x^2$.

34. Empregue o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3 + x^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

Ilustre, fazendo os gráficos na mesma tela, de f, g e h (como no Teorema do Confronto).

35. Se $4x - 9 \leqslant f(x) \leqslant x^2 - 4x + 7$ para $x \geqslant 0$, encontre $\lim_{x \to 4} f(x)$.

36. Se $2x \leqslant g(x) \leqslant x^4 - x^2 + 2$ para todo x, encontre $\lim_{x \to 1} g(x)$.

37. Demonstre que $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^4 \cos \frac{2}{x} = 0$.

38. Demonstre que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0$.

39–44 Encontre, quando existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

39. $\displaystyle\lim_{x \to 3} (2x + |x - 3|)$

40. $\displaystyle\lim_{x \to -6} \frac{2x + 12}{|x + 6|}$

41. $\displaystyle\lim_{x \to 0{,}5^-} \frac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}$

42. $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{2 - |x|}{2 + x}$

43. $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

44. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

45. A *função sinal*, denotada por sgn, é definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico dessa função.

(b) Encontre ou explique por que não existe cada um dos limites a seguir.

(i) $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x$ (ii) $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x$

(iii) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ (iv) $\lim_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x|$

46. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Encontre $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x)$.

(b) Existe $\lim_{x \to 2} f(x)$?

(c) Esboce o gráfico de f.

47. Seja $F(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$.

(a) Encontre

(i) $\lim_{x \to 1^+} F(x)$ (ii) $\lim_{x \to 1^-} F(x)$

(b) Existe $\lim_{x \to 1} F(x)$?

(c) Esboce o gráfico de F.

48. Seja

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \\ x - 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Calcule, se existirem, os limites.

(i) $\lim_{x \to 1^-} g(x)$ (ii) $\lim_{x \to 1} g(x)$ (iii) $g(1)$

(iv) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (v) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (vi) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(b) Esboce o gráfico de g.

49. (a) Se o símbolo $[\![\ ]\!]$ denota a função maior inteiro do Exemplo 10, calcule

(i) $\lim_{x \to -2^+} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x \to -2} [\![x]\!]$ (iii) $\lim_{x \to -2{,}4} [\![x]\!]$

(b) Se n for um inteiro, calcule

(i) $\lim_{x \to n^-} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x \to n^+} [\![x]\!]$

(c) Para quais valores de a o $\lim_{x \to a} [\![x]\!]$ existe

50. Seja $f(x) = [\![\cos x]\!]$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

(a) Esboce o gráfico de f.

(b) Calcule cada limite, se existir

(i) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to (\pi/2)^-} f(x)$

(iii) $\lim_{x \to (\pi/2)^+} f(x)$ (iv) $\lim_{x \to \pi/2} f(x)$

(c) Para quais valores de a existe $\lim_{x \to a} f(x)$?

51. Se $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, mostre que existe $\lim_{x \to 2} f(x)$, mas que não é igual a $f(2)$.

52. Na Teoria da Relatividade, a Fórmula da Contração de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto no repouso e c é a velocidade da luz. Encontre $\lim_{v \to c^-} L$ e interprete o resultado. Por que é necessário o limite à esquerda?

53. Se p for um polinômio, mostre que $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$.

54. Se r for uma função racional, use o Exercício 53 para mostrar que $\lim_{x \to a} r(x) = r(a)$ para todo número a no domínio de r.

55. Se $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, encontre $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

56. Se $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, encontre os seguintes limites.

$l \to 0$

(a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

57. Se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

demonstre que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

58. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x \to a} f(x)$ nem $\lim_{x \to a} g(x)$ existam.

59. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x \to a} f(x)$ nem $\lim_{x \to a} g(x)$ existam.

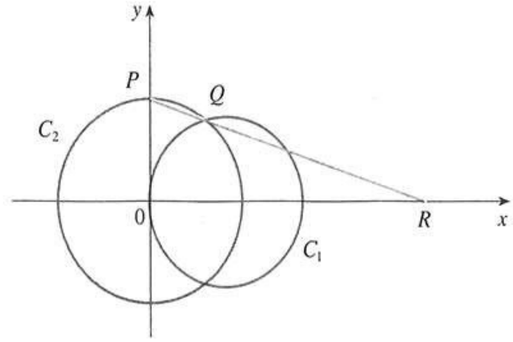
60. Calcule $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$.

61. Existe um número a tal que

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Caso afirmativo, encontre a e o valor do limite.

62. A figura mostra um círculo fixo C_1 de equação $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e um círculo C_2, a ser encolhido, com raio r e centro na origem. P é o ponto $(0, r)$, Q é o ponto de intersecção superior dos dois círculos, e R é o ponto de intersecção da reta PQ com o eixo x. O que acontecerá com R quando C_2 se contrair, isto é, quando $r \to 0^+$?



2.4 A DEFINIÇÃO PRECISA DE LIMITE

A definição intuitiva de limite dada na Seção 2.2 é inadequada para alguns propósitos, pois frases como "x está próximo de 2" e "$f(x)$ aproxima-se cada vez mais de L" são vagas. Para sermos capazes de demonstrar conclusivamente que

$$\lim_{x \to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right) = 0{,}0001 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

devemos tornar precisa a definição de limite.

Para chegar à definição precisa de limite, consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

É intuitivamente claro que quando x está próximo de 3, mas $x \neq 3$, então $f(x)$ está próximo de 5 e, sendo assim, $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.

Para obter informações mais detalhadas sobre como $f(x)$ varia quando x está próximo de 3, fazemos a seguinte pergunta:

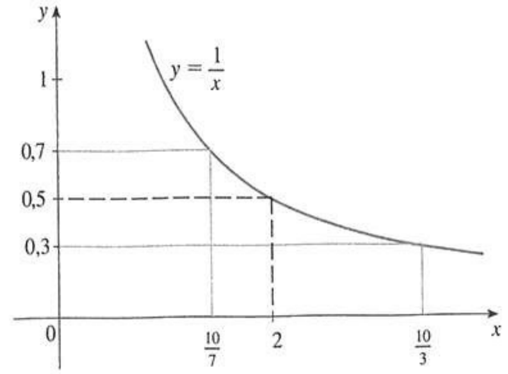
Quão próximo de 3 deverá estar x para que $f(x)$ difira de 5 por menos que 0,1?

A distância de x a 3 é $|x - 3|$, e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x) - 5|$, logo, nosso problema é achar um número δ tal que

2.4 EXERCÍCIOS

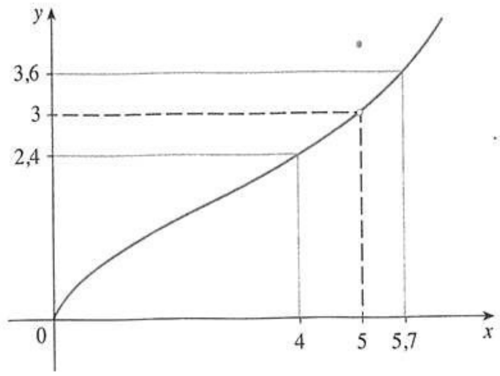
1. Use o gráfico dado de $f(x) = 1/x$ para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad |x - 2| < \delta \quad \text{então} \quad \left|\frac{1}{x} - 0{,}5\right| < 0{,}2$$



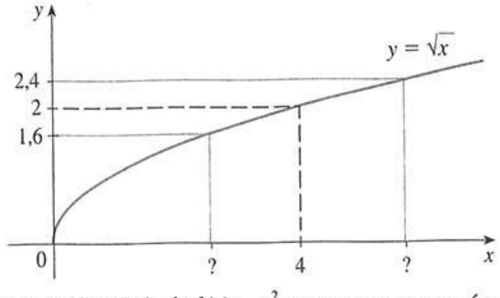
2. Use o gráfico dado de f para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 5| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - 3| < 0{,}6$$



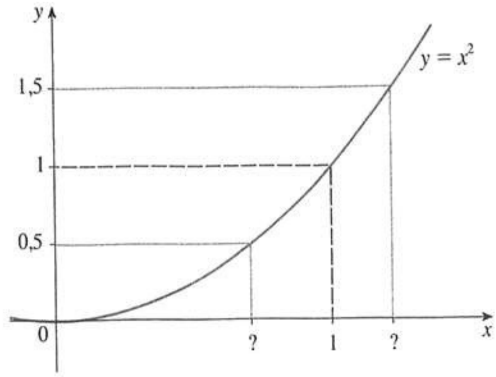
3. Use o gráfico dado de $f(x) = \sqrt{x}$ para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad |x - 4| < \delta \quad \text{então} \quad |\sqrt{x} - 2| < 0{,}4$$



4. Use o gráfico dado de $f(x) = x^2$ para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{então} \quad |x^2 - 1| < \tfrac{1}{2}$$



5. Use um gráfico para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad \left|x - \frac{\pi}{4}\right| < \delta \quad \text{então} \quad |\operatorname{tg} x - 1| < 0{,}2$$

6. Use um gráfico para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{então} \quad \left|\frac{2x}{x^2 + 4} - 0{,}4\right| < 0{,}1$$

7. Para o limite

$$\lim_{x \to 1} (4 + x - 3x^3) = 2$$

ilustre a Definição 2 encontrando os valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 1$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

8. Para o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

ilustre a Definição 2 encontrando os valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

9. Dado que $\lim_{x \to \pi/2} \operatorname{tg}^2 x = \infty$, ilustre a Definição 6 encontrando os valores de δ que correspondam a (a) $M = 1\,000$ e (B) $M = 10\,000$.

10. Use um gráfico para encontrar um número δ tal que

$$\text{se} \quad 5 < x < 5 + \delta \quad \text{então} \quad \frac{x^2}{\sqrt{x - 5}} > 100$$

11. Foi pedido a um torneiro mecânico é que fabricasse um disco de metal circular com área de $1\,000 \text{ cm}^2$.

(a) Qual o raio do disco produzido?

(b) Se for permitido ao torneiro uma tolerância do erro de $\pm 5 \text{ cm}^2$ na área do disco, quão próximo do raio ideal da parte (a) o torneiro precisa controlar o raio?

(c) Em termos da definição de ε, δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, o que é x? O que é $f(x)$? O que é a? O que é L? Qual o valor de ε dado? Qual o valor correspondente de δ?

12. Uma fornalha para a produção de cristais é usada em uma pesquisa para determinar a melhor maneira de manufaturar os cristais utilizados em componentes eletrônicos para os veículos espaciais. Para a produção perfeita do cristal, a temperatura deve ser controlada precisamente, ajustando-se a potência de entrada. Suponha que a relação seja dada por

$$T(w) = 0{,}1w^2 + 2{,}155w + 20$$

onde T é a temperatura em graus Celsius e w é a potência de entrada em watts.

(a) Qual a potência necessária para manter a temperatura em 200°C?

(b) Se for permitida uma variação de ± 1°C a partir dos 200°C, qual será o intervalo de potência permitido para a entrada?

(c) Em termos da definição de ε, δ de $\lim_{x\to a} f(x) = L$, o que é x? O que é $f(x)$? O que é a? O que é L? Qual o valor de ε dado? Qual o valor correspondente de δ?

13. (a) Encontre um número δ tal que se $|x - 2| < \delta$, então $|4x - 8| < \varepsilon$, onde $\varepsilon = 0{,}1$.

(b) Repita a parte (a) com $\varepsilon = 0{,}01$.

14. Dado que $\lim_{x\to 2}(5x - 7) = 3$, ilustre a Definição 2 encontrando valores de δ que correspondam a $\varepsilon = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}05$ e $\varepsilon = 0{,}01$.

15–18 Demonstre cada afirmação usando a definição ε, δ de limite e ilustre com um diagrama como o da Figura 9.

15. $\lim_{x\to 1}(2x + 3) = 5$

16. $\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 2$

17. $\lim_{x\to -3}(1 - 4x) = 13$

18. $\lim_{x\to 4}(7 - 3x) = -5$

19–32 Demonstre cada afirmação usando a definição ε, δ de limite.

19. $\lim_{x\to 3}\frac{x}{5} = \frac{3}{5}$

20 $\lim_{x\to 6}\left(\frac{x}{4} + 3\right) = \frac{9}{2}$

21. $\lim_{x\to -5}\left(4 - \frac{3x}{5}\right) = 7$

22. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = 7$

23. $\lim_{x\to a} x = a$

24. $\lim_{x\to a} c = c$

25. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

26. $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$

27. $\lim_{x\to 0} |x| = 0$

28. $\lim_{x\to 9^-} \sqrt[4]{9 - x} = 0$

29. $\lim_{x\to 2}(x^2 - 4x + 5) = 1$

30. $\lim_{x\to 3}(x^2 + x - 4) = 8$

31. $\lim_{x\to -2}(x^2 - 1) = 3$

32. $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$

33. Verifique que outra escolha possível de δ para mostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ no Exemplo 4 é $\delta = \min\{2, \varepsilon/8\}$.

34. Verifique, usando argumentos geométricos, que a maior escolha possível para o δ para que se possa mostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ é $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$.

SCA **35.** (a) Para o limite $\lim_{x\to 1}(x^3 + x + 1) = 3$, use um gráfico para determinar o valor do δ correspondente a $\varepsilon = 0{,}4$.

(b) Usando um sistema de computação algébrica para resolver a equação cúbica $x^3 + x + 1 = 3 + \varepsilon$, determine o maior valor possível para δ que funcione para qualquer $\varepsilon > 0$ dado.

(c) Tome $\varepsilon = 0{,}4$ na sua resposta da parte (b) e compare com a sua resposta da parte (a).

36. Demonstre que $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

37. Demonstre que $\lim_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}$ se $a > 0$

$\left[\textit{Sugestão}: \text{Use } |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.\right]$

38. Se H for a função de Heaviside definida no Exemplo 6 da Seção 2.2, demonstre, usando a Definição 2, que não existe $\lim_{t\to 0} H(t)$. [*Sugestão*: Use uma demonstração indireta: suponha que o limite seja L. Tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$ na definição de limite e tente chegar a uma contradição.]

39. Se a função f for definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

demonstre que $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe.

40. Comparando as Definições 2, 3 e 4, demonstre o Teorema 1 da Seção 2.3.

41. Quão próximo de -3 devemos tomar x para que

$$\frac{1}{(x + 3)^4} > 10\,000$$

42. Demonstre, usando a Definição 6, que $\lim_{x\to -3}\frac{1}{(x + 3)^4} = \infty$.

43. Demonstre que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

44. Suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, onde c é um número real. Demonstre cada afirmação

(a) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \infty$

(b) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \infty$ se $c > 0$

(c) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = -\infty$ se $c < 0$

Figura 11 mostra o resultado ao se aplicar o *zoom*, obtendo a janela retangular [1,2, 1,3] por [−0,2, 0,2].

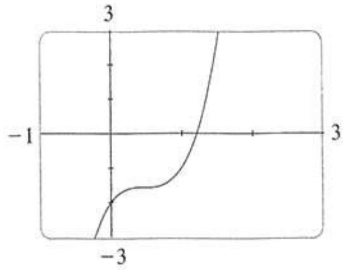


FIGURA 10

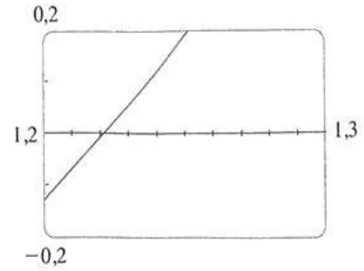


FIGURA 11

De fato, o Teorema do Valor Intermediário desempenha um papel na própria maneira de funcionar destas ferramentas gráficas. Um computador calcula um número finito de pontos sobre o gráfico e acende os pixels que contêm os pontos calculados; ele pressupõe que a função é contínua e acende todos os valores intermediários entre dois pontos consecutivos. O computador, portanto, conecta os pixels acendendo os pixels intermediários.

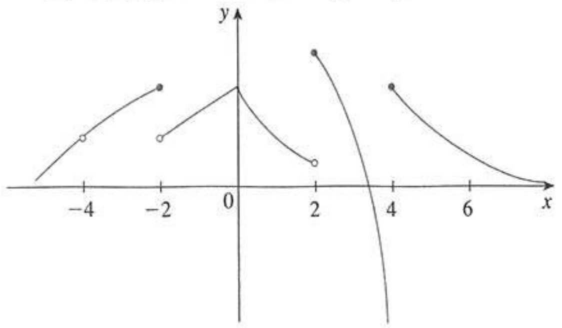
2.5 EXERCÍCIOS

1. Escreva uma equação que expresse o fato de que uma função f é contínua no número 4.

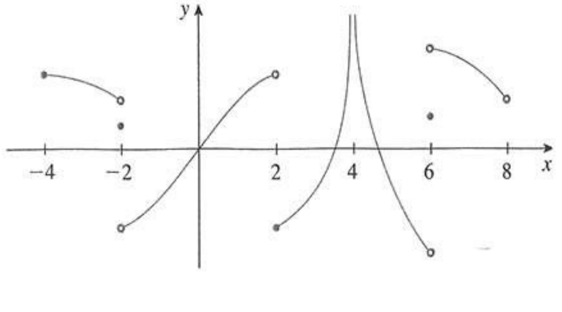
2. Se f é contínua em $(-\infty,\infty)$, o que você pode dizer sobre seu gráfico?

3. (a) Do gráfico de f, diga os números nos quais f é descontínua e explique por quê.

(b) Para cada um dos números indicados na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.



4. Do gráfico de g, diga os intervalos nos quais g é contínua.



5. Esboce o gráfico de uma função que é contínua em toda a parte, exceto em $x = 3$ e é contínua à esquerda em 3.

6. Esboce o gráfico de uma função que tenha uma descontinuidade de salto em $x = 2$ e uma descontinuidade removível em $x = 4$, mas seja contínua no restante.

7. Um estacionamento cobra \$ 3 pela primeira hora ou fração, e \$ 2 por hora sucessiva, ou fração, até o máximo diário de \$ 10.

(a) Esboce o gráfico do custo do estacionamento como uma função do tempo decorrido.

(b) Discuta as descontinuidades da função e seu significado para alguém que use o estacionamento.

8. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.

(a) A temperatura em um local específico como uma função do tempo

(b) A temperatura em um tempo específico como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris

(c) A altitude acima do nível do mar como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris

(d) O custo de uma corrida de táxi como uma função da distância percorrida

(e) A corrente no circuito para as luzes de uma sala como uma função do tempo

9. Se f e g forem funções contínuas, com $f(3) = 5$ e $\lim_{x\to 3}[2f(x) - g(x)] = 4$, encontre $g(3)$.

10–12 Use a definição de continuidade e propriedades dos limites para demonstrar que a função é contínua em um dado número a.

10. $f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}, \quad a = 4$

11. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1$

12. $h(t) = \dfrac{2t - 3t^2}{1 + t^3}, \quad a = 1$

13–14 Use a definição da continuidade e propriedades de limites para mostrar que a função é contínua no intervalo dado.

13. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}, \quad (2, \infty)$

14. $g(x) = 2\sqrt{3 - x}, \quad (-\infty, 3]$

15–20 Explique por que a função é descontínua no número dado a. Esboce o gráfico da função.

15. $f(x) = \ln |x - 2| \qquad a = 2$

16. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

17. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \qquad a = 0$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

19. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

20. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases} \qquad a = 3$

21–28 Explique, usando os Teoremas 4, 5, 7 e 9, por que a função é contínua em todo o número em seu domínio. Diga o domínio.

21. $G(x) = \dfrac{x^4 + 17}{6x^2 + x - 1}$

22. $G(x) = \sqrt[3]{x}\,(1 + x^3)$

23. $R(x) = x^2 + \sqrt{2x - 1}$

24. $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x + 1}$

25. $L(t) = e^{-5t} \cos 2\pi t$

26. $F(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x^2 - 1)$

27. $G(t) = \ln(t^4 - 1)$

28. $H(x) = \cos\left(e^{\sqrt{x}}\right)$

29–30 Localize as descontinuidades da função e ilustre com um gráfico.

29. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

30. $y = \ln(\operatorname{tg}^2 x)$

31–34 Use a continuidade para calcular o limite.

31. $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$

32. $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

33. $\displaystyle\lim_{x \to 1} e^{x^2 - x}$

34. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$

35–36 Mostre que f é contínua em $(-\infty, \infty)$.

35. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{se } x \geq \pi/4 \end{cases}$

37–39 Encontre os pontos nos quais f é descontínua. Em quais desses pontos f é contínua à direita, à esquerda ou em nenhum deles? Esboce o gráfico de f.

37. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 1/x & \text{se } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

40. A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma unidade de massa a uma distância r do centro do planeta é

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{se } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{se } r \geq R \end{cases}$$

onde M é a massa da Terra; R é seu raio; e G é a constante gravitacional. F é uma função contínua de r?

41. Para quais valores da constante c a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{se } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

42. Encontre os valores de a e b que tornam f contínua em toda parte.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{se } 2 < x < 3 \\ 2x - a + b & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

43. Quais das seguintes funções f têm uma descontinuidade removível em a? Se a descontinuidade for removível, encontre uma função g que seja igual a f para $x \neq a$ e seja contínua em a.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$

(c) $f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!], \quad a = \pi$

44. Suponha que uma função f seja contínua em $[0, 1]$, exceto em 0,25, e que $f(0) = 1$ e $f(1) = 3$. Seja $N = 2$. Esboce dois gráficos possíveis de f, um indicando que f pode não satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário e outro mostrando que f poderia ainda satisfazer a conclusão do Teorema Valor Intermediário (mesmo que não satisfaça as hipóteses).

45. Se $f(x) = x^2 + 10 \operatorname{sen} x$, mostre que existe um número c tal que $f(c) = 1\,000$.

46. Suponha f contínua em $[1, 5]$ e que as únicas soluções da equação $f(x) = 6$ são $x = 4$ e $x = 1$. Se $f(2) = 8$, explique por que $f(3) > 6$.

47–50 Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

47. $x^4 + x - 3 = 0$, $(1, 2)$ **48.** $\sqrt[3]{x} = 1 - x$, $(0, 1)$

49. $\cos x = x$, $(0, 1)$ **50.** $\ln x = e^{-x}$, $(1, 2)$

51–52 (a) Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real. (b) Use sua calculadora para encontrar um intervalo de comprimento 0,01 que contenha uma raiz.

51. $e^x = 2 - x$ **52.** $x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0$

53–54 (a) Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real. (b) Use sua ferramenta gráfica para encontrar a raiz correta até a terceira casa decimal.

53. $100e^{-x/100} = 0{,}01x^2$ **54.** $\operatorname{arctg} x = 1 - x$

55. Demonstre que f é contínua em a se e somente se

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$$

56. Para demonstrar que seno é contínuo, precisamos mostrar que $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ para todo número real a. Pelo Exercício 55, uma afirmação equivalente é que

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(a + h) = \operatorname{sen} a$$

Use (6) para mostrar que isso é verdadeiro.

57. Demonstre que o cosseno é uma função contínua.

58. (a) Demonstre a parte 3 do Teorema 4.
(b) Demonstre a parte 5 do Teorema 4.

59. Para que valores de x a função f é contínua?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

60. Para que valores de x a função g é contínua?

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ x & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

61. Existe um número que é exatamente um a mais que seu cubo?

62. Se a e b são números positivos, demonstre que a equação

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

tem pelo menos uma solução no intervalo $(-1, 1)$.

63. Demonstre que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $(-\infty, \infty)$.

64. (a) Mostre que a função valor absoluto $F(x) = |x|$ é contínua em toda a parte.
(b) Demonstre que se f for uma função contínua em um intervalo, então $|f|$ também o é.
(c) A recíproca da afirmação da parte (b) também é verdadeira? Em outras palavras, se $|f|$ for contínua, segue que f também é? Se for assim, demonstre isso. Caso contrário, encontre um contraexemplo.

65. Um monge tibetano deixa o monastério às 7 horas da manhã e segue sua caminhada usual para o topo da montanha, chegando lá às 7 horas da noite. Na manhã seguinte, ele parte do topo às 7 horas da manhã, pega o mesmo caminho de volta e chega ao monastério às 7 horas da noite. Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe um ponto no caminho que o monge vai cruzar exatamente na mesma hora do dia em ambas as caminhadas.

2.6 LIMITES NO INFINITO; ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0,600000
± 3	0,800000
± 4	0,882353
± 5	0,923077
± 10	0,980198
± 50	0,999200
± 100	0,999800
$\pm 1\,000$	0,999998

Nas Seções 2.2 e 2.4, estudamos os limites infinitos e as assíntotas verticais. Lá tomávamos x tendendo a um número e, como resultado, os valores de y ficavam arbitrariamente grandes (positivo ou negativo). Nesta seção vamos tornar x arbitrariamente grande (positivo ou negativo) e ver o que acontece com y.

Vamos começar pela análise do comportamento da função f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

quando x aumenta. A tabela ao lado fornece os valores dessa função, corretos até a sexta casa decimal, e o gráfico de f feito por um computador está na Figura 1.

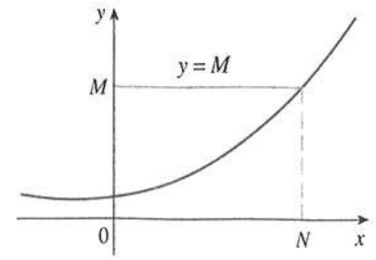


FIGURA 19
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Finalmente, observamos que pode ser definido um limite infinito no infinito da forma a seguir. A ilustração geométrica está dada na Figura 19.

> **9** **DEFINIÇÃO** Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então
>
> $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
>
> significa que para todo positivo M existe um correspondente número positivo N tal que
>
> $$\text{se } x > N \qquad \text{então} \qquad f(x) > M$$

Definições análogas podem ser feitas quando o símbolo ∞ é substituído por $-\infty$ (veja o Exercício 70).

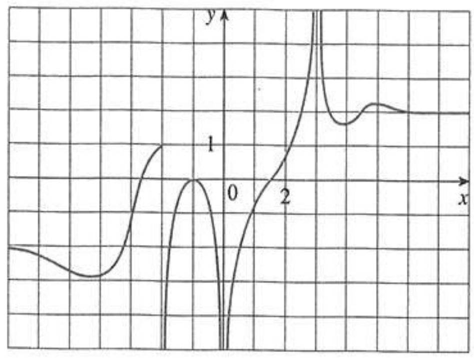
2.6 EXERCÍCIOS

1. Explique com suas palavras o significado de cada um dos itens a seguir.
(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$ (b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$

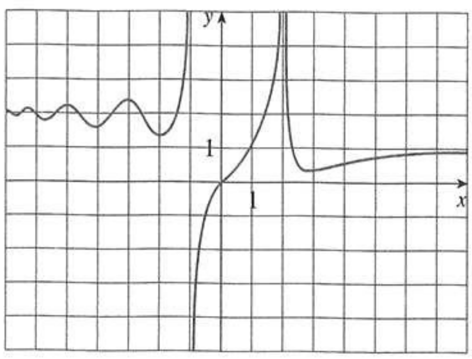
2. (a) O gráfico de $y = f(x)$ pode interceptar uma assíntota vertical? E uma assíntota horizontal? Ilustre com gráficos.

(b) Quantas assíntotas horizontais pode ter o gráfico de $y = f(x)$? Ilustre com gráficos as possibilidades.

3. Para a função f, cujo gráfico é dado, diga quem são.
(a) $\lim_{x\to 2} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$
(c) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ (d) $\lim_{x\to\infty} f(x)$
(e) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ (f) As equações das assíntonas



4. Para a função g, cujo gráfico é dado, determine o que se pede.
(a) $\lim_{x\to\infty} g(x)$ (b) $\lim_{x\to-\infty} g(x)$
(c) $\lim_{x\to 3} g(x)$ (d) $\lim_{x\to 0} g(x)$
(e) $\lim_{x\to -2^+} g(x)$ (f) As equações das assíntotas



5–10 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

5. $f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad f$ é ímpar

6. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1,$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

7. $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim_{x\to -2} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -3$

9. $f(0) = 3, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 4, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2,$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 4^+} f(x) = \infty,$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

10. $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 2, \quad f(0) = 0, \quad f$ é par

11. Faça uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

calculando a função $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ e 100. Então, use o gráfico de f para comprovar sua conjectura.

12. (a) Use o gráfico de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ correto até a segunda casa decimal.

(b) Use a tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite até quatro casas decimais.

13–14 Calcule o limite e justifique cada passagem indicando a propriedade apropriada dos limites.

13. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x + 4}{2x^2 + 5x - 8}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}}$

15–36 Encontre o limite.

15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x + 3}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x + 5}{x - 4}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$

18. $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \frac{6t^2 + 5t}{(1 - t)(2t - 3)}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 5x}{2x^3 - x^2 + 4}$

20. $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \frac{t^2 + 2}{t^3 + t^2 - 1}$

21. $\displaystyle\lim_{u\to\infty} \frac{4u^4 + 5}{(u^2 - 2)(2u^2 - 1)}$

22. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + 2}{\sqrt{9x^2 + 1}}$

23. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

24. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

25. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

26. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

27. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

28. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \cos x$

29. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + x^3 + x^5}{1 - x^2 + x^4}$

30. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + 1}$

31. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^4 + x^5)$

32. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x}\right)$

33. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$

34. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \operatorname{tg}^{-1}(x^2 - x^4)$

35. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (e^{-2x} \cos x)$

36. $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^+} e^{\operatorname{tg} x}$

37. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

traçando o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$

(b) Use uma tabela de valores para $f(x)$ para conjecturar o valor do limite.

(c) Demonstre que sua conjectura está correta.

38. (a) Use o gráfico

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ com uma casa decimal.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com quatro casas decimais.

(c) Encontre o valor exato do limite.

39–44 Encontre as assíntotas horizontais e verticais de cada curva. Confira seu trabalho por meio de um gráfico da curva e das estimativas das assíntotas.

39. $\displaystyle y = \frac{x}{x + 4}$

40. $\displaystyle y = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 1}$

41. $\displaystyle y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

42. $\displaystyle y = \frac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$

43. $\displaystyle y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

44. $\displaystyle y = \frac{2e^x}{e^x - 5}$

45. Estime a assíntota horizontal da função

$$f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2\,000}$$

através do gráfico de f para $-10 \leqslant x \leqslant 10$. A seguir, determine a equação da assíntota calculando o limite. Como você explica a discrepância?

46. (a) Trace a função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

Quantas assíntotas horizontais e verticais você observa? Use o gráfico para estimar os valores dos limites

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

(b) Calculando valores de $f(x)$, dê estimativas numéricas dos limites na parte (a).

(c) Calcule os valores exatos dos limites na parte (a). Você obtém os mesmos valores ou valores diferentes para estes limites? [Em vista de sua resposta na parte (a), você pode ter de verificar seus cálculos para o segundo limite.]

47. Encontre uma fórmula para uma função f que satisfaça as seguintes condições:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty, \quad f(2) = 0,$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$$

48. Encontre uma fórmula para uma função que tenha por assíntotas verticais $x = 1$ e $x = 3$ e por assíntota horizontal $y = 1$.

49–52 Encontre os limites quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$. Use essa informação, bem como as intersecções com os eixos, para fazer um esboço do gráfico, como no Exemplo 11.

49. $y = x^2 - x^6$

50. $y = x^3(x + 2)^2(x - 1)$

51. $y = (3 - x)(1 + x)^2(1 - x)^4$

52. $y = x^2(x^2 - 1)^2(x + 2)$

53. (a) Use o Teorema do Confronto para determinar $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

(b) Faça um gráfico de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$. Quantas vezes o gráfico cruza a assíntota?

54. Por *comportamento final* de uma função queremos indicar uma descrição do que acontece com seus valores quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$.

(a) Descreva e compare o comportamento final das funções

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

por meio do gráfico de ambas nas janelas retangulares $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ e $[-10, 10]$ por $[-10\,000, 10\,000]$.

(b) Dizemos que duas funções têm o *mesmo comportamento final* se sua razão tende a 1 quando $x \to \infty$. Mostre que P e Q têm o mesmo comportamento final.

55. Sejam P e Q polinômios. Encontre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se o grau de P for (a) menor que o grau de Q e (b) maior que o grau de Q.

56. Faça um esboço da curva $y = x^n$ (n inteiro) nos seguintes casos:

(i) $n = 0$ (ii) $n > 0$, n ímpar

(iii) $n > 0$, n par (iv) $n < 0$, n ímpar

(v) $n < 0$, n par

Então, use esses esboços para encontrar os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 0^+} x^n$ (b) $\lim_{x\to 0^-} x^n$

(c) $\lim_{x\to\infty} x^n$ (d) $\lim_{x\to -\infty} x^n$

57. Encontre $\lim_{x\to\infty} f(x)$ se, para todo $x > 1$,

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x - 1}}$$

58. (a) Um tanque contém 5 000 litros de água pura. Água salgada contendo 30 g de sal por litro de água é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 25 l/min. Mostre que a concentração de sal depois de t minutos(em gramas por litro) é

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

(b) O que acontece com a concentração quando $t \to \infty$?

59. Seremos capazes de mostrar, no Capítulo 9 do Volume II, que, sob certas condições, a velocidade $v(t)$ de uma gota de chuva caindo no instante t é

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*})$$

em que g é a aceleração da gravidade; e v^* é a velocidade final da gota.

(a) Encontre $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

(b) Faça o gráfico de $v(t)$ se $v^* = 1$ m/s e $g = 9{,}8$ m/s^2. Quanto tempo levará para a velocidade da gota atingir 99% de sua velocidade final?

60. (a) Fazendo os gráficos de $y = e^{-x/10}$ e $y = 0{,}1$ na mesma tela, descubra quão grande você precisará tomar x para que $e^{-x/10} < 0{,}1$.

(b) A parte (a) pode ser resolvida sem usar uma ferramenta gráfica?

61. Use o gráfico para encontrar um número N tal que

$$\text{se} \quad x > N \quad \text{então} \quad \left| \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} - 1{,}5 \right| < 0{,}05$$

62. Para o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = 2$$

ilustre a Definição 7, encontrando os valores de N correspondentes a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

63. Para o limite

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = -2$$

ilustre a Definição 8, encontrando os valores de N correspondentes a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

64. Para o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

ilustre a Definição 9, encontrando um valor de N correspondente a $M = 100$.

65. (a) De que tamanho devemos tomar x para que $1/x^2 < 0{,}0001$?

(b) Tomando $r = 2$ no Teorema 5, temos a igualdade

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Demonstre isso diretamente usando a Definição 7.

66. (a) De que tamanho devemos tomar x para que $1/\sqrt{x} < 0{,}0001$?

(b) Tomando $r = \frac{1}{2}$ no Teorema 5, temos a igualdade

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Demonstre isso diretamente usando a Definição 7.

67. Use a Definição 8 para demonstrar que $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

68. Demonstre, usando a Definição 9, que $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$.

69. Use a Definição 9 para demonstrar que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

70. Formule precisamente a definição de

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

Então, use sua definição para demonstrar que

$$\lim_{x\to -\infty} (1 + x^3) = -\infty$$

71. Demonstre que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^+} f(1/t)$$

e

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^-} f(1/t)$$

se esses limites existirem.

■ UMA OBSERVAÇÃO SOBRE UNIDADES

As unidades para a taxa média de variação $\Delta D/\Delta t$ são as unidades para ΔD divididas pelas unidades para Δt, a saber, bilhões de dólares por ano. A taxa instantânea de variação é o limite das taxas médias de variação, de modo que é medida nas mesmas unidades: bilhões de dólares por ano.

Da tabela vemos que $D'(1998)$ situa-se em algum lugar entre $-1{,}1$ e $-5{,}5$ bilhões de dólares por ano. [Aqui, estamos fazendo a hipótese razoável de que o débito não flutue muito entre 1998 e 2002.] Estimamos que a taxa de crescimento da dívida nacional do Canadá em1998 foi a média desses dois números, a saber:

$$D'(1998) \approx -3{,}3 \text{ bilhões de dólares por ano}$$

O sinal de menos significa que o débito está *decrescendo* naquele instante.

Um outro método seria traçar a função de débito e estimar a inclinação da reta tangente quando $t = 1998$. □

Nos Exemplos 3, 6 e 7 vimos três casos específicos de taxas de variação: a velocidade de um objeto é a taxa de variação do deslocamento com relação ao tempo; o custo marginal é a taxa de variação do custo de produção em relação ao número de itens produzidos; a taxa de variação do débito em relação ao tempo é de interesse na economia. Aqui está uma pequena amostra de outras taxas de variação: em física, a taxa de variação do trabalho com relação ao tempo é chamada de potência. Os químicos que estudam reações químicas estão interessados na taxa de variação da concentração de um reagente em relação ao tempo (chamada taxa de reação). Um biólogo está interessado na taxa de variação da população de uma colônia de bactérias em relação ao tempo. Na realidade, o cálculo das taxas de variação é importante em todas as ciências naturais, na engenharia e mesmo nas ciências sociais. Mais exemplos serão dados na Seção 3.7.

Todas essas taxas de variação são derivadas e podem, portanto, ser interpretadas como inclinações das tangentes. Isto dá importância extra à solução de problemas envolvendo tangentes. Sempre que resolvemos um problema envolvendo retas tangentes, não estamos resolvendo apenas um problema geométrico. Estamos também resolvendo implicitamente uma grande variedade de problemas envolvendo taxas de variação nas ciências e na engenharia.

2.7 EXERCÍCIOS

1. Uma curva tem por equação $y = f(x)$.

(a) Escreva uma expressão para a inclinação da reta secante pelos pontos $P(3, f(3))$ e $Q(x, f(x))$.

(b) Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente em P.

2. Faça o gráfico da curva $y = e^x$ nas janelas $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0{,}5, 0{,}5]$ por $[0{,}5, 1{,}5]$ e $[-0{,}1, 0{,}1]$ por $[0{,}9, 1{,}1]$. Dando um *zoom* no ponto $(0, 1)$, o que você percebe na curva?

3. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à parábola $y = 4x - x^2$ no ponto $(1, 3)$.

(i) usando a Definição 1 (ii) usando a Equação 2

(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).

(c) Faça os gráficos da parábola e da reta tangente. Como verificação, dê um *zoom* em direção ao ponto $(1, 3)$ até que parábola e a reta tangente fiquem indistinguíveis.

4. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x - x^3$ no ponto $(1, 0)$

(i) usando a Definição 1 (ii) usando a Equação 2

(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).

(c) Faça um gráfico da curva e da reta tangente em janelas retangulares cada vez menores centrados no ponto $(1, 0)$ até que a curva e a tangente pareçam indistinguíveis.

5–8 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

5. $y = \dfrac{x-1}{x-2}$, $(3, 2)$ **6.** $y = 2x^3 - 5x$, $(-1, 3)$

7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$ **8.** $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$, $(0, 0)$

9. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ no ponto onde $x = a$.

(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, 5)$ e $(2, 3)$.

(c) Faça o gráfico da curva e de ambas as retas tangentes em uma mesma tela.

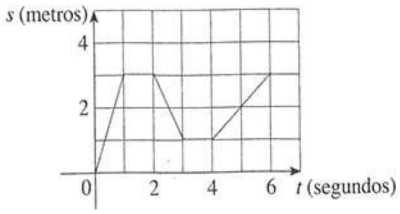
10. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 1/\sqrt{x}$ no ponto onde $x = a$.

(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, 1)$ e $(4, \frac{1}{2})$.

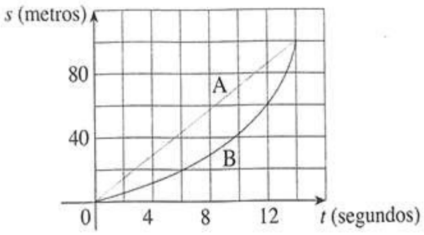
(c) Faça o gráfico da curva e de ambas as tangentes em uma mesma tela.

11. (a) Uma partícula começa se movendo para a direita ao longo de uma reta horizontal; o gráfico de sua função posição está mostrado. Quando a partícula está se movendo para a direita? E para a esquerda? Quando está parada?

(b) Trace um gráfico da função velocidade.



12. Estão dados os gráficos das funções posições de dois corredores, A e B, que correm 100 metros rasos e terminam empatados.



(a) Descreva e compare como os corredores correram a prova.

(b) Em que instante a distância entre os corredores é maior?

(c) Em que instante eles têm a mesma velocidade?

13. Se uma bola for atirada ao ar com uma velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $y = 10t - 4{,}9t^2$. Encontre a velocidade quando $t = 2$.

14. Se uma pedra for lançada para cima no planeta Marte com uma velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) após t segundos é dada por $H = 10t - 1{,}86t^2$.

(a) Encontre a velocidade da pedra após um segundo.

(b) Encontre a velocidade da pedra quando $t = a$.

(c) Quando a pedra atinge a superfície?

(d) Com que velocidade da pedra atinge a superfície?

15. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação do movimento $s = 1/t^2$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula nos instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$.

16. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação $s = t^2 - 8t + 18$, em que t é medido em segundos.

(a) Encontre as velocidades médias sobre os seguintes intervalos de tempo:

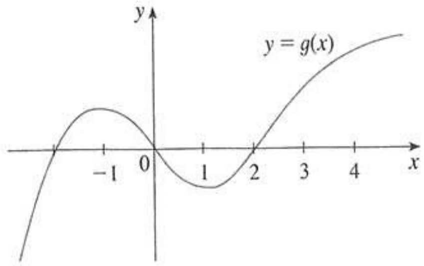
(i) $[3, 4]$ (ii) $[3{,}5, 4]$ (iii) $[4, 5]$ (iv) $[4, 4{,}5]$

(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 4$.

(c) Faça o gráfico de s como uma função de t e desenhe as retas secantes cujas inclinações são as velocidades médias da parte (a), e a reta tangente cuja inclinação é a velocidade instantânea da parte (b).

17. Para a função g cujo gráfico é dado, arrume os seguintes números em ordem crescente e explique seu raciocínio:

$$0 \quad g'(-2) \quad g'(0) \quad g'(2) \quad g'(4)$$



18. (a) Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = g(x)$, em $x = 5$ se $g(5) = -3$ e $g'(5) = 4$.

(b) Se a reta tangente a $y = f(x)$ em $(4, 3)$ passar pelo ponto $(0, 2)$, encontre $f(4)$ e $f'(4)$.

19. Esboce o gráfico de uma função f para a qual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$, e $f'(2) = -1$.

20. Esboce o gráfico de uma função g para a qual $g(0) = g'(0) = 0$, $g'(-1) = -1$, $g'(1) = 3$, e $g'(2) = 1$.

21. Se $f(x) = 3x^2 - 5x$, encontre $f'(2)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à parábola $y = 3x^2 - 5x$ no ponto $(2, 2)$.

22. Se $g(x) = 1 - x^3$, encontre $g'(0)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 1 - x^3$ no ponto $(0, 1)$.

23. (a) Se $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encontre $F'(2)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 5x/(1 + x^2)$ no ponto $(2, 2)$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e a reta tangente na mesma tela.

24. (a) Se $G(x) = 4x^2 - x^3$, encontre $G'(a)$ e use-o para encontrar equações das retas tangentes à curva $y = 4x^2 - x^3$ nos pontos $(2, 8)$ e $(3, 9)$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e as retas tangentes na mesma tela.

25–30 Encontre $f'(a)$.

25. $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$

26. $f(t) = t^4 - 5t$

27. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$

29. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$

30. $f(x) = \sqrt{3x + 1}$

31–36 Cada limite representa a derivada de certa função f em certo número a. Diga quem é f e a em cada caso.

31. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1 + h)^{10} - 1}{h}$

32. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

33. $\lim_{x \to 5} \dfrac{2^x - 32}{x - 5}$

34. $\lim_{x \to \pi/4} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \pi/4}$

35. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

36. $\lim_{t \to 1} \dfrac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

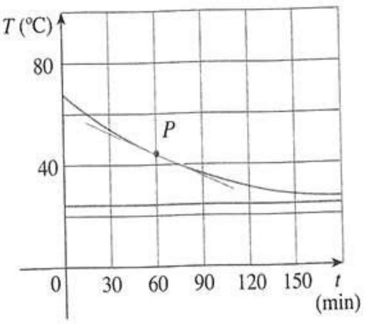
37-38 Uma partícula se move ao longo de uma reta com equação de movimento $s = f(t)$, em que s é medido em metros e t em segundos. Encontre a velocidade e a velocidade escalar quando $t = 5$.

37. $f(t) = 100 + 50t - 4{,}9t^2$

38. $f(t) = t^{-1} - t$

39. Uma lata de refrigerante morna é colocada na geladeira. Esboce o gráfico da temperatura do refrigerante como uma função do tempo. A taxa de variação inicial da temperatura é maior ou menor que a taxa de variação após 1 hora?

40. Um peru assado é tirado do forno quando sua temperatura atinge 85 °C e colocado sobre uma mesa na sala, na qual a temperatura é de 24 °C. O gráfico mostra como decresce a temperatura do peru até aproximar da temperatura da sala. (Na Seção 3.8 poderemos usar a Lei do Resfriamento de Newton para encontrar uma equação para T como uma função do tempo.) Por meio da medida da inclinação da reta tangente, estime a taxa de variação da temperatura após 1 hora.



41. A tabela mostra a estimativa da porcentagem da população da Europa que usa telefones celulares. (Estimativas dadas para meados do ano.)

Ano	1998	1999	2000	2001	2002	2003
P	28	39	55	68	77	83

(a) Encontre a taxa média do crescimento do número de celulares

(i) de 2000 a 2002 (ii) de 2000 a 2001 (iii) de 1999 a 2000

Em cada caso, inclua as unidades.

(b) Estime a taxa instantânea de crescimento em 2000 tomando a média de duas taxas médias da variação. Quais são suas unidades?

(c) Estime a taxa instantânea de crescimento em 2000 medindo a inclinação de uma tangente.

42. O número N de franquias de uma certa cadeia popular de cafeteiras é mostrada na tabela. (Dados os números de franquias no dia 30 de junho de cada ano.)

Ano	1998	1999	2000	2001	2002
N	1 886	2 135	3 501	4 709	5 886

(a) Determine a taxa média de crescimento

(i) de 2000 a 2002 (ii) de 2000 a 2001 (iii) de 1999 a 2000

Em cada caso, inclua as unidades.

(b) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2000 tomando a média de duas taxas médias de variação. Quais são suas unidades?

(c) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2000 medindo a inclinação de uma tangente.

43. O custo (em dólares) de produzir x unidades de uma certa mercadoria é $C(x) = 5\,000 + 10x + 0{,}05x^2$.

(a) Encontre a taxa média da variação de C em relação a x quando os níveis de produção estiverem variando

(i) de $x = 100$ a $x = 105$ (ii) de $x = 100$ a $x = 101$

(b) Encontre a taxa instantânea da variação de C em relação a x quando $x = 100$. (Isso é chamado *custo marginal*. Seu significado será explicado na Seção 3.7.)

44. Se um tanque cilíndrico comporta 100 000 litros de água, que podem escoar pela base do tanque em uma hora, então a Lei de Torricelli fornece o volume V de água que restou no tanque após t minutos como

$$V(t) = 100\,000\left(1 - \frac{t}{60}\right)^2 \qquad 0 \leq t \leq 60$$

Encontre a taxa pela qual a água está escoando para fora do tanque (a taxa instantânea da variação de V em relação a t) como uma função de t. Quais são suas unidades? Para os instantes t = 0, 10, 20, 30, 40, 50 e 60 minutos, encontre a taxa do escoamento e a quantidade de água restante no tanque. Resuma o que você achou em uma ou duas sentenças. Em que instante a taxa do escoamento é máxima? E a mínima?

45. O custo da produção de x quilogramas de ouro provenientes de uma nova mina é $C = f(x)$ dólares.

(a) Qual o significado da derivada $f'(x)$? Quais são suas unidades?

(b) O que significa $f'(50) = 36$?

(c) Você acha que os valores de $f'(x)$ vão crescer ou decrescer a curto prazo? E a longo prazo? Explique.

46. O número de bactéria depois de t horas em um laboratório experimental controlado é $n = f(x)$.

(a) Qual o significado da derivada de $f'(5)$? Quais são suas unidades?

(b) Suponha que haja uma quantidade ilimitada de espaço e nutrientes para a bactéria. Qual será maior: $f'(5)$ ou $f'(10)$? Se a oferta de nutrientes for limitada, isso afetaria sua conclusão? Explique.

47. Seja $T(t)$ a temperatura (em °C) em Seul t horas após o meio-dia em 21 de agosto de 2004. A tabela mostra os valores dessa função registrados de duas em duas horas. Qual o significado de $T'(6)$? Estime o seu valor.

t	0	2	4	6	8	10
T	34,4	35,6	38,3	32,8	26,1	22,8

48. A quantidade (em quilogramas) de café vendida por uma companhia para uma lanchonete ao preço de p dólares por quilogramas é dada por $Q = f(p)$.

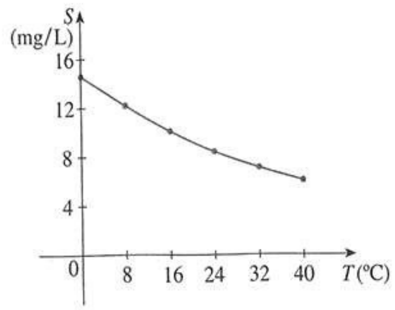
(a) Qual o significado da derivada $f'(8)$? Quais são suas unidades?

(b) $f'(8)$ é positivo ou negativo? Explique.

49. A quantidade de oxigênio que pode ser dissolvido em água depende da temperatura da água. (Logo, a poluição térmica influencia o nível de oxigênio da água.) O gráfico mostra como a solubilidade do oxigênio S varia em função da temperatura T da água.

(a) Qual o significado da derivada $S'(T)$? Quais são suas unidades?

(b) Dê uma estimativa do valor $S'(16)$ e interprete-o.

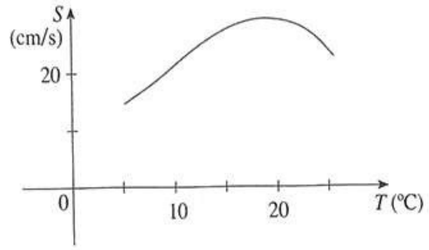


Adaptado de *Environmental Science: Living Within the System of Nature*, 2d ed.; por Charles E. Kupchella, © 1989. Reproduzido com a permissão de Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ.

50. O gráfico mostra a influência da temperatura T sobre a velocidade máxima de nado S do salmão Coho.

(a) Qual o significado da derivada $S'(T)$? Quais são suas unidades?

(b) Dê uma estimativa do valor $S'(15)$ e de $S'(25)$ e interprete-os.



51–52 Determine se existe ou não $f'(0)$.

51. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

52. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

PROJETO ESCRITO

MÉTODOS INICIAIS PARA ENCONTRAR AS TANGENTES

A primeira pessoa a formular explicitamente as ideias de limite e derivada foi Sir Isaac Newton, em 1660. Mas Newton reconhecia que "Se vejo mais longe do que outros homens é porque estou sobre os ombros de gigantes". Dois desses gigantes eram Pierre Fermat (1601-1665) e o professor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton estava familiarizado com os métodos deles para encontrar as retas tangentes, e esses métodos desempenharam papel importante na formulação final do cálculo de Newton.

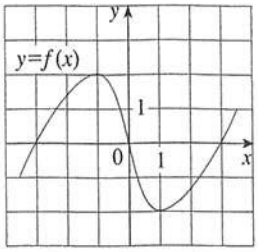
As seguintes referências contêm explicações desses métodos. Leia uma ou mais referências e escreva um relatório comparando os métodos ou de Fermat ou de Barrow com os métodos modernos. Em particular, use o método da Seção 2.7 para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 + 2x$ no ponto $(1, 3)$ e mostre como Fermat ou Barrow teriam resolvido o mesmo problema. Embora você tenha usado as derivadas e eles não, mostre a analogia entre os métodos.

1. BOYER, Carl; MERZBACH, Uta. *A History of Mathematics*. Nova York: John Wiley, 1989, p. 389, 432.
2. EDWARDS, C. H. *The Historical Development of the Calculus*. Nova York: Springer-Verlag, 1979, p. 124, 132.
3. EVES, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. 6. ed. Nova York: Saunders, 1990, p. 391, 395.
4. KLINE, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Nova York: Oxford University Press, 1972, p. 344, 346.

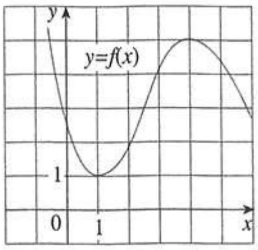
2.8 EXERCÍCIOS

1–2 Use os gráficos dados para estimar o valor de cada derivada. Esboce então o gráfico de f'.

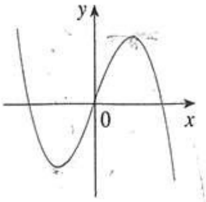
1. (a) $f'(-3)$
(b) $f'(-2)$
(c) $f'(-1)$
(d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$
(f) $f'(2)$
(g) $f'(3)$

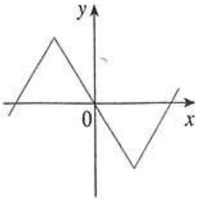


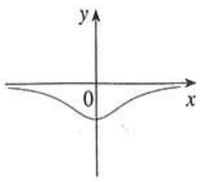
2. (a) $f'(0)$
(b) $f'(1)$
(c) $f'(2)$
(d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$
(f) $f'(5)$

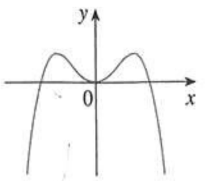


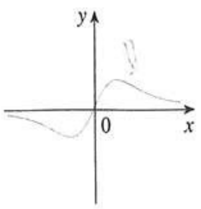
3. Associe o gráfico de cada função em (a)-(d) com o gráfico de sua derivada em I-IV. Dê razões para suas escolhas.

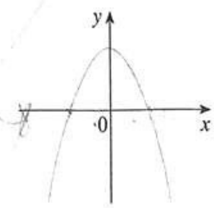
(a)


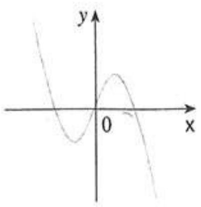
(b)


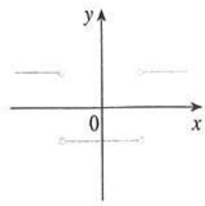
(c)


(d)


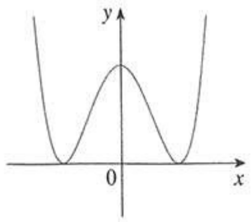
I


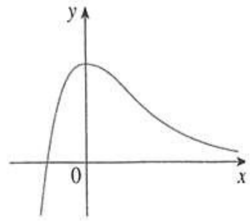
II


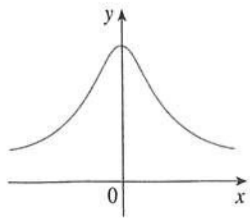
III


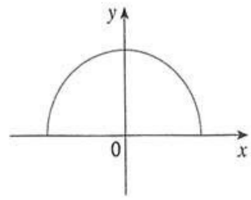
IV


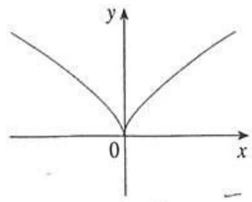
4–11 Trace ou copie o gráfico da função f dada. (Suponha eixos com a mesma escala.) Use então o método do Exemplo 1 para esboçar o gráfico de f'.

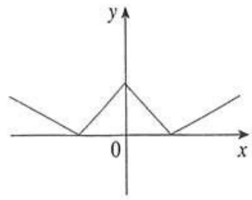
4.


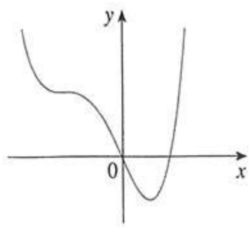
5.


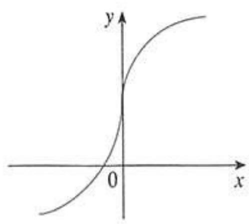
6.


7.


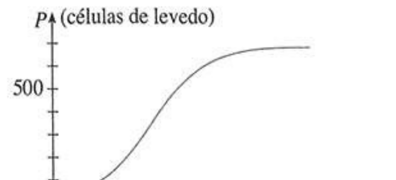
8.


9.


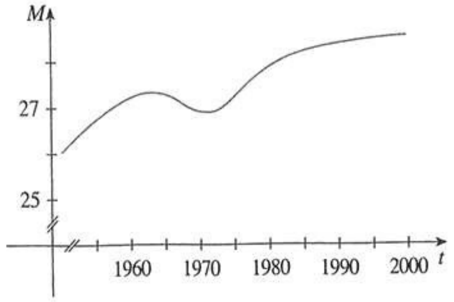
10.


11.


12. O gráfico mostrado corresponde ao da função população $P(t)$ de cultura em laboratório de células de levedo. Use o método do Exemplo 1 para obter o gráfico da derivada $P'(t)$. O que o gráfico de P' nos diz sobre a população de levedos?



13. O gráfico mostra como a idade média dos homens japoneses quando se casam pela primeira vez variou na última metade do século XX. Esboce o gráfico da função derivada $M'(t)$. Em quais os anos a derivada foi negativa?



14–16 Faça um esboço cuidadoso de f e abaixo dele esboce o gráfico de f' como foi feito nos Exercícios 4-11. Você pode sugerir uma fórmula para $f'(x)$ a partir de seu gráfico?

14. $f(x) = \text{sen}\, x$ **15.** $f(x) = e^x$

16. $f(x) = \ln x$

17. Seja $f(x) = x^2$.

(a) Estime os valores de $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1)$ e $f'(2)$ fazendo uso de uma ferramenta gráfica para fazer um *zoom* no gráfico de f.

(b) Use a simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2}), f'(-1)$ e $f'(-2)$.

(c) Utilize os resultados de (a) e (b) para conjecturar uma fórmula para $f'(x)$.

(d) Use a definição de derivada para demonstrar que sua conjectura em (c) está correta.

18. Seja $f(x) = x^3$.

(a) Estime os valores de $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1), f'(2)$ e $f'(3)$ fazendo uso de uma ferramenta gráfica para fazer um *zoom* no gráfico de f.

(b) Use simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2}), f'(-1), f'(-2)$ e $f'(-3)$.

(c) Empregue os valores de (a) e (b) para fazer o gráfico de f'.

(d) Conjecture uma fórmula para $f'(x)$.

(e) Use a definição de derivada para demonstrar que sua conjectura em (d) está correta.

19–29 Encontre a derivada da função dada usando a definição. Diga quais são os domínios da função e da derivada.

19. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$ **20.** $f(x) = mx + b$

21. $f(t) = 5t - 9t^2$ **22.** $f(x) = 1{,}5x^2 - x + 3{,}7$

23. $f(x) = x^3 - 3x + 5$ **24.** $f(x) = x + \sqrt{x}$

25. $g(x) = \sqrt{1 + 2x}$ **26.** $f(x) = \dfrac{3 + x}{1 - 3x}$

27. $G(t) = \dfrac{4t}{t + 1}$ **28.** $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

29. $f(x) = x^4$

30. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ começando pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$ e usando as transformações da Seção 1.3.

(b) Use o gráfico da parte (a) para esboçar o gráfico de f'.

(c) Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$. Quais os domínios de f e f'?

(d) Use um recurso gráfico para fazer o gráfico f' e compare-o com o esboço na parte (b).

31. (a) Se $f(x) = x^4 + 2x$, encontre $f'(x)$.

(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável comparando os gráficos de f e f'.

32. (a) Se $f(t) = t^2 - \sqrt{t}$, encontre, $f'(t)$.

(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável comparando os gráficos de f e f'.

33. A taxa de desemprego $U(t)$ varia com o tempo. A tabela fornece a porcentagem de desempregados na força de trabalho australiana em meados de 1995 a 2004.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1995	8,1	2000	6,2
1996	8,0	2001	6,9
1997	8,2	2002	6,5
1998	7,9	2003	6,2
1999	6,7	2004	5,6

(a) Qual o significado de $U'(t)$? Quais são suas unidades?

(b) Construa a tabela de valores de $U'(t)$.

34. Seja $P(t)$ a porcentagem da população das Filipinas com idade maior que 60 anos no instante t. A tabela fornece projeções dos valores desta função de 1995 a 2020.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1995	5,2	2010	6,7
2000	5,5	2015	7,7
2005	6.1	2020	8,9

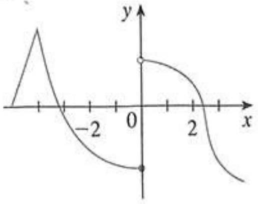
(a) Qual o significado de $P'(t)$? Quais são suas unidades?

(b) Construa uma tabela de valores para $P'(t)$.

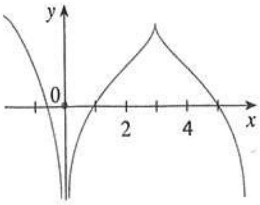
(c) Faça os gráficos de P e P'.

35-38 O gráfico de f é dado. Diga, explicando quais, os números em que f não é diferenciável.

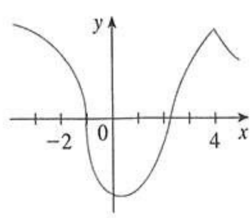
35.



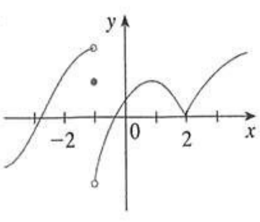
36.



37.



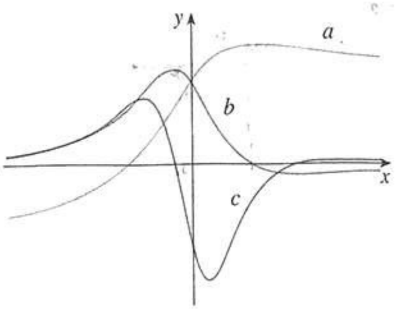
38.



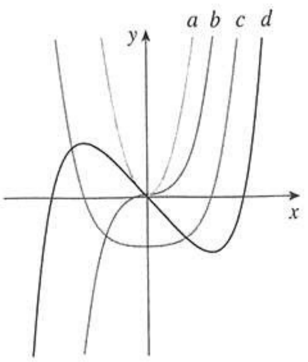
39. Faça o gráfico da função $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Dê um *zoom* primeiro em direção ao ponto $(-1, 0)$ e então em direção à origem. Qual a diferença entre os comportamentos de f próximo a esses dois pontos? O que você conclui sobre a diferenciabilidade de f?

40. Dê um *zoom* em direção aos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(-1, 0)$ sobre o gráfico da função $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. O que você observa? Explique o que você viu em termos da diferenciabilidade de g.

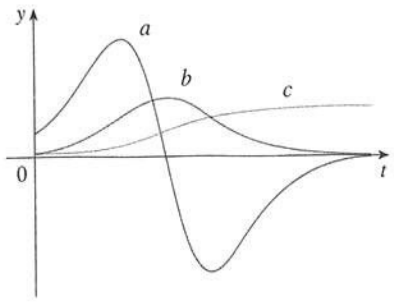
41. A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



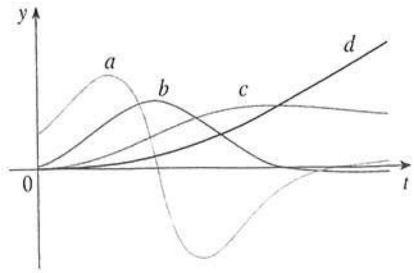
42. A figura mostra os gráficos de $f, f'\ f''$ e f'''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



43. A figura mostra os gráficos de três funções. Uma é a função posição de um carro, outra é a velocidade do carro e outra é sua aceleração. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



44. A figura mostra os gráficos de quatro funções. Uma é a função posição de um carro, outra é a velocidade do carro, outra é sua aceleração e outra é seu *jerk*. Identifique cada curva e explique suas escolhas.

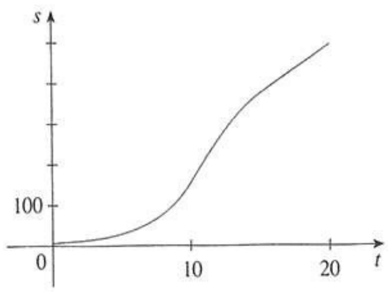


45-46 Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$ e $f''(x)$. A seguir, trace f, f' e f'' em uma mesma tela e verifique se suas respostas são razoáveis.

45. $f(x) = 1 + 4x - x^2$ **46.** $f(x) = 1/x$

47. Se $f(x) = 2x^2 - x^3$, encontre $f'(x), f''(x), f'''(x)$, e $f^{(4)}(x)$. Trace f, f', f'' e f''' em uma mesma tela. Os gráficos são consistentes com as interpretações geométricas destas derivadas?

48. (a) É mostrado o gráfico da função posição de um veículo, onde s é medido em metros e t em segundos. Use-o para traçar a velocidade e a aceleração do veículo. Qual é a aceleração em $t = 10$ segundos?



(b) Use a curva da aceleração da parte (a) para estimar o *jerk* em $t = 10$ segundos. Qual a unidade do *jerk*?

49. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

(a) Se $a \neq 0$, use a Equação 2.7.5 para encontrar $f'(a)$.

(b) Mostre que $f'(0)$ não existe.

(c) Mostre que $y = \sqrt[3]{x}$ tem uma reta tangente vertical em $(0, 0)$. (Lembre-se da forma do gráfico de f. Veja a Figura 13 na Seção 1.2.)

50. (a) Se $g(x) = x^{2/3}$, mostre que $g'(0)$ não existe.

(b) Se $a \neq 0$, encontre $g'(a)$.

(c) Mostre que $y = x^{2/3}$ tem uma reta tangente vertical em $(0, 0)$.

(d) Ilustre a parte (c) fazendo o gráfico de $y = x^{2/3}$.

51. Mostre que a função $f(x) = |x - 6|$ não é diferenciável em 6. Encontre uma fórmula para f' e esboce seu gráfico.

52. Onde a função maior inteiro não é diferenciável? Encontre uma fórmula para $f(x) = [\![x]\!]$ e esboce seu gráfico.

53. (a) Esboce o gráfico da função $f(x) = x|x|$.
(b) Para quais os valores de x f é diferenciável?
(c) Encontre uma fórmula para f'.

54. A **derivada à esquerda** e **à direita** de f em a são definidas por

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

e
$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se esses limites existirem. Então $f'(a)$ existe se, e somente se, essas derivadas unilaterais existirem e forem iguais.
(a) Encontre $f'_-(4)$ e $f'_+(4)$ para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 5 - x & \text{se } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5-x} & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

(b) Esboce o gráfico de f.
(c) Onde f é descontínua?
(d) Onde f não é diferenciável?

55. Lembre-se de que uma função f é chamada *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, e *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$ para cada um destes x. Demonstre cada uma das afirmativas a seguir.
(a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.
(b) A derivada de uma função ímpar é uma função par.

56. Quando você abre uma torneira de água quente, a temperatura T da água depende do tempo no qual a água está correndo.
(a) Esboce um gráfico possível de T como uma função do tempo t que decorreu desde que a torneira foi aberta.
(b) Descreva como é a taxa de variação de T em relação a t quando t está crescendo.
(c) Esboce um gráfico da derivada de T.

57. Seja ℓ a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$. O *ângulo de inclinação* de ℓ é o ângulo ϕ que ℓ faz com a direção positiva do eixo x. Calcule ϕ com a precisão de um grau.

1 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Explique o significado de cada um dos limites a seguir e ilustre com um esboço.
(a) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ (b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$
(c) $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ (d) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$
(e) $\lim_{x\to \infty} f(x) = L$

2. Descreva as várias situações nas quais um limite pode não existir. Ilustre-as com uma figura.

3. Enuncie cada uma das seguintes Propriedades dos Limites.
(a) Propriedade da Soma (b) Propriedade da Diferença
(c) Propriedade do Múltiplo Constante (d) Propriedade do Produto
(e) Propriedade do Quociente (f) Propriedade da Potência
(g) Propriedade da Raiz

4. O que afirma o Teorema do Confronto?

5. (a) O que significa dizer que uma reta $x = a$ é uma assíntota vertical da curva $y = f(x)$? Trace curvas que ilustrem cada uma das várias possibilidades.
(b) O que significa dizer que uma reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$? Trace curvas que ilustrem cada uma das várias possibilidades.

6. Quais das curvas a seguir têm assíntotas verticais? E horizontais?
(a) $y = x^4$ (b) $y = \text{sen}\, x$ (c) $y = \text{tg}\, x$
(d) $y = \text{tg}^{-1} x$ (e) $y = e^x$ (f) $y = \ln x$
(g) $y = 1/x$ (h) $y = \sqrt{x}$

7. (a) Qual o significado de f ser contínua em a?
(b) Qual o significado de f ser contínua no intervalo $(-\infty, \infty)$? Nesse caso, o que se pode dizer sobre o gráfico de f?

8. O que afirma o Teorema do Valor Intermediário?

9. Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

10. Considere um objeto movendo-se ao longo de uma reta com a posição dada por $f(t)$ no instante t. Escreva uma expressão para a velocidade instantânea do objeto em $t = a$. Como pode ser interpretada essa velocidade em termos do gráfico de f?

11. Se $y = f(x)$ e x variar de x_1 a x_2, escreva uma expressão para o seguinte:
(a) Taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$.
(b) Taxa instantânea de variação de y em relação a x em $x = x_1$.

12. Defina a derivada $f'(a)$. Discuta as duas maneiras de interpretar esse número.

13. Defina a segunda derivada de f. Se $f(t)$ for a função posição de uma partícula, como você pode interpretar a segunda derivada?

14. (a) O que significa f ser diferenciável em a?
(b) Qual a relação entre diferenciabilidade e continuidade de uma função?
(c) Esboce o gráfico de uma função que é contínua, mas não diferenciável em $a = 2$.

15. Descreva as várias situações nas quais uma função não é diferenciável. Ilustre-as com figuras.

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{2x}{x-4}-\dfrac{8}{x-4}\right)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x}{x-4}-\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8}{x-4}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+6x-7)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5x-6)}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2+2x-4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-4)}$

4. Se $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to 5} [f(x)/g(x)]$ não existe.

5. Se $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to 5} [f(x)/g(x)]$ não existe.

6. Se $\lim_{x\to 6} [f(x)g(x)]$ existe, então o limite deve ser $f(6)g(6)$.

7. Se p for um polinômio, então $\lim_{x\to b} p(x) = p(b)$.

8. Se $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, então $\lim_{x\to 0} [f(x) - g(x)] = 0$.

9. Uma função pode ter duas assíntotas horizontais distintas.

10. Se f tem domínio $[0, \infty)$ e não possui assíntota horizontal, então $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

11. Se a reta $x = 1$ for uma assíntota vertical de $y = f(x)$, então f não está definida em 1.

12. Se $f(1) > 0$ e $f(3) < 0$, então existe um número c entre 1 e 3 tal que $f(c) = 0$.

13. Se f for contínua em 5 e $f(5) = 2$ e $f(4) = 3$, então $\lim_{x\to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.

14. Se f for contínua em $[-1, 1]$ e $f(-1) = 4$ e $f(1) = 3$, então existe um número r tal que $|r| < 1$ e $f(r) = \pi$.

15. Seja f uma função tal que $\lim_{x\to 0} f(x) = 6$. Então existe um número δ tal que, se $0 < |x| < \delta$, então $|f(x) - 6| < 1$.

16. Se $f(x) > 1$ para todo x e $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, então $\lim_{x\to 0} f(x) > 1$.

17. Se f for contínua em a, então f é diferenciável em a.

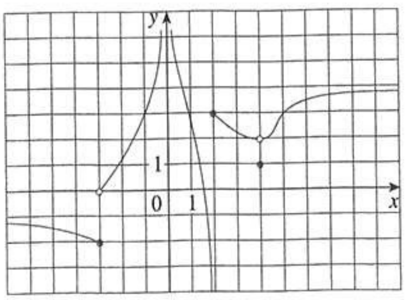
18. Se $f'(r)$ existe, então $\lim_{x\to r} f(x) = f(r)$.

19. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

20. A equação $x^{10} - 10x^2 + 5 = 0$ tem uma raiz no intervalo $(0, 2)$.

EXERCÍCIOS

1. É dado o gráfico de f.
   (a) Encontre cada limite, ou explique por que ele não existe.
   (i) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$
   (iii) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ (iv) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$
   (v) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (vi) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
   (vii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ (viii) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$
   (b) Dê as equações das assíntotas horizontais.
   (c) Dê as equações das assíntotas verticais.
   (d) Em que números f é descontínua? Explique.



2. Esboce um gráfico de um exemplo de função f que satisfaça as seguintes condições:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \infty$,
$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$,
f é contínua à direita em 3.

3–20 Encontre o limite.

3. $\lim\limits_{x\to 1} e^{x^3-x}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

6. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

7. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(h-1)^3+1}{h}$

8. $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2-4}{t^3-8}$

9. $\lim\limits_{r\to 9}\dfrac{\sqrt{r}}{(r-9)^4}$

10. $\lim\limits_{v\to 4^+}\dfrac{4-v}{|4-v|}$

11. $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u^4-1}{u^3+5u^2-6u}$

12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

14. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

15. $\lim\limits_{x\to \pi^-}\ln(\operatorname{sen} x)$

16. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1-2x^2-x^4}{5+x-3x^4}$

17. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)$ **18.** $\lim_{x\to\infty} e^{x-x^2}$

19. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg}^{-1}(1/x)$ **20.** $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$

21–22 Use gráficos para descobrir as assíntotas das curvas. E então demonstre o que você tiver descoberto.

21. $y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

22. $y = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}$

23. Se $2x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ para $0 < x < 3$, encontre $\lim_{x\to 1} f(x)$.

24. Demonstre que $\lim_{x\to 0} x^2 \cos(1/x^2) = 0$.

25–28 Demonstre cada uma das igualdades usando a definição precisa de limite.

25. $\lim_{x\to 2}(14-5x) = 4$ **26.** $\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x} = 0$

27. $\lim_{x\to 2}(x^2-3x) = -2$ **28.** $\lim_{x\to 4^+}\dfrac{2}{\sqrt{x-4}} = \infty$

29. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \\ 3 - x & \text{se } 0 \leqslant x < 3 \\ (x-3)^2 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

(a) Calcule cada limite, se ele existir.

(i) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (iii) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(iv) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (v) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ (vi) $\lim_{x\to 3} f(x)$

(b) Onde f é descontínua?

(c) Esboce o gráfico de f.

30. Seja

$$g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2 - x & \text{se } 2 < x \leqslant 3 \\ x - 4 & \text{se } 3 < x < 4 \\ \pi & \text{se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(a) Para cada um dos números 2, 3 e 4, descubra se g é contínua à esquerda, à direita ou contínua no número.

(b) Esboce o gráfico de g.

31–32 Mostre que cada função é contínua em seu domínio. Diga qual é o domínio.

31. $h(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$ **32.** $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-2}$

33–34 Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação no intervalo dado.

33. $2x^3 + x^2 + 2 = 0$, $(-2, -1)$

34. $e^{-x^2} = x$, $(0, 1)$

35. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = 9 - 2x^2$ no ponto $(2, 1)$.

(b) Encontre uma equação dessa reta tangente.

36. Encontre equações da reta tangente à curva

$$y = \frac{2}{1-3x}$$

nos pontos com coordenada x 0 e -1.

37. O deslocamento (em metros) de um objeto movendo-se ao longo de uma reta é dado por $s = 1 + 2t + \frac{1}{4}t^2$, onde t é medido em segundos.

(a) Encontre a velocidade média nos seguintes períodos.

(i) $[1, 3]$ (ii) $[1, 2]$

(iii) $[1; 1{,}5]$ (iv) $[1; 1{,}1]$

(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 1$.

38. De acordo com a Lei de Boyle, se a temperatura de um gás confinado for mantida constante, então o produto da pressão P pelo volume V é uma constante. Suponha que, para um certo gás, $PV = 4\,000$, P é medido em pascals e V é medido em litros.

(a) Encontre a taxa de variação média de P quando V aumenta de 3l para 4l.

(b) Expresse V como uma função de P e mostre que a taxa de variação instantânea de V em relação a P é inversamente proporcional ao quadrado de P.

39. (a) Use a definição de derivada para encontrar $f'(2)$, onde $f(x) = x^3 - 2x$.

(b) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 2x$ no ponto $(2, 4)$.

(c) Ilustre a parte (b) fazendo o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

40. Encontre uma função f e um número a tais que

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

41. O custo total de saldar uma dívida a uma taxa de juros de $r\%$ ao ano é $C = f(r)$.

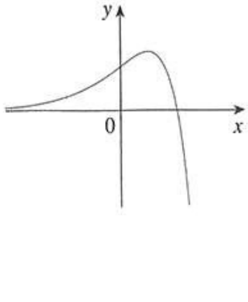
(a) Qual o significado da derivada $f'(r)$? Quais são suas unidades?

(b) O que significa a afirmativa $f'(10) = 1\,200$?

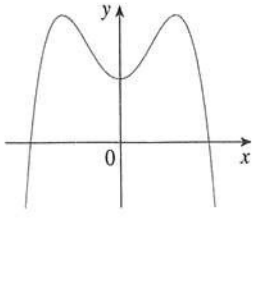
(c) $f'(r)$ é sempre positiva ou muda de sinal?

42–44 Trace ou copie o gráfico da função. Então, esboce o gráfico de sua derivada.

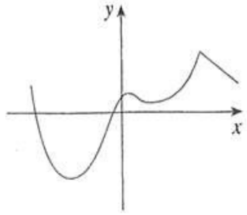
42.



43.



44.



45. (a) Se $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$, use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$.

(b) Encontre os domínios de f e f'.

(c) Faça os gráficos na mesma tela de f e f'. Compare os gráficos para ver se sua resposta da parte (a) é razoável.

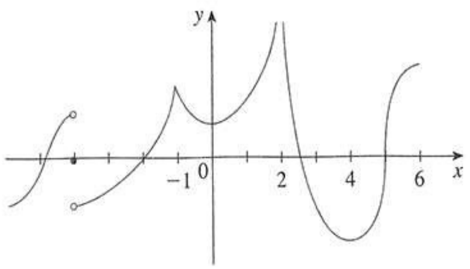
46. (a) Encontre as assíntotas do gráfico de $f(x) = \dfrac{4 - x}{3 + x}$ e use-as para esboçar o gráfico.

(b) Use o gráfico da parte (a) para esboçar o gráfico de f'.

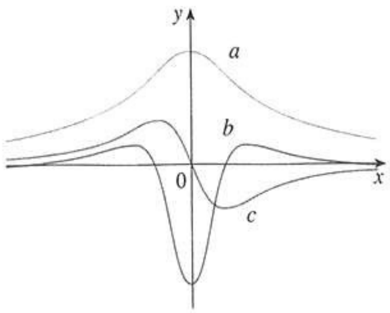
(c) Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$.

(d) Use uma ferramenta gráfica para fazer o gráfico de f' e compare-o com o esboço da parte (b).

47. É dado o gráfico de f. Indique os números nos quais f não é diferenciável.



48. A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



49. Seja $E(t)$ o valor do euro (a moeda europeia) em termos do dólar americano no instante t. A tabela dá valores desta função, em meados do ano, de 2000 a 2004. Interprete $E'(2002)$ e estime seu valores.

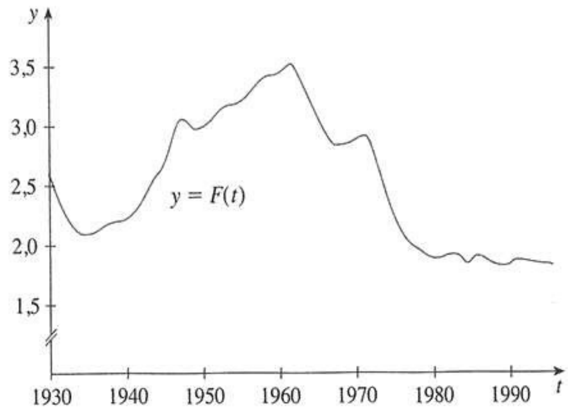
t	2000	2001	2002	2003	2004
$E(t)$	0,955	0,847	0,986	1.149	1,218

50. A *taxa de fertilidade total* no momento t, denotada por $F(t)$, é a estimativa do número médio de crianças nascidas de cada mulher (supondo que a taxa de nascimento corrente permaneça constante). O gráfico da taxa de fertilidade total da Austrália mostra as flutuações entre 1930 a 2000.

(a) Estime os valores de $F'(1946)$ e $F'(1973)$.

(b) Qual o significado dessas derivadas?

(c) Você pode sugerir as razões para os valores dessas derivadas?



51. Suponha que $|f(x)| \leq g(x)$ para todo x, onde $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Encontre $\lim_{x \to a} f(x)$.

52. Seja $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$.

(a) Para quais valores de a existe $\lim_{x \to a} f(x)$?

(b) Em quais números f é descontínua?

Em uma discussão anterior consideramos a estratégia de *introduzir algo novo* na resolução de um problema (veja a página 65). No exemplo a seguir vamos mostrar como esse princípio pode ser algumas vezes proveitoso quando calculamos os limites. A ideia é mudar a variável – introduzir uma nova variável relacionada à original – de forma a tornar mais simples o problema. Mais tarde, na Seção 5.5, faremos uso mais extensivo dessa ideia geral.

Exemplo 1 Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x}$, onde c é uma constante diferente de 0.

SOLUÇÃO Colocado dessa forma, esse limite parece desafiador. Na Seção 2.3 calculamos vários limites nos quais tanto o numerador quanto o denominador tendem a zero. Lá, nossa estratégia foi realizar algum tipo de manipulação algébrica que levasse a um cancelamento simplificador, porém aqui não está claro que tipo de álgebra será necessário.

Assim, introduzimos uma nova variável t pela equação

$$t = \sqrt[3]{1 + cx}$$

Também necessitamos expressar x em termos de t, e então resolvemos esta equação:

$$t^3 = 1 + cx \qquad x = \frac{t^3 - 1}{c}$$

Observe que $x \to 0$ é equivalente a $t \to 1$. Isso nos permite converter o limite dado em outro envolvendo a variável t:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x} = \lim_{t \to 1} \frac{t - 1}{(t^3 - 1)/c}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1}$$

A mudança de variável nos permitiu substituir um limite relativamente complicado por um mais simples, de um tipo já visto antes. Fatorando o denominador como uma diferença dos cubos, obtemos

$$\lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{c}{t^2 + t + 1} = \frac{c}{3}$$

As questões a seguir destinam-se a testar e desafiar suas habilidades na resolução de problemas. Algumas delas requerem uma considerável quantidade de tempo para ser resolvidas; assim sendo, não se desencoraje se não puder resolvê-las de imediato. Se você tiver dificuldades, pode ser proveitoso rever a discussão sobre os princípios de resolução de problemas na página 65.

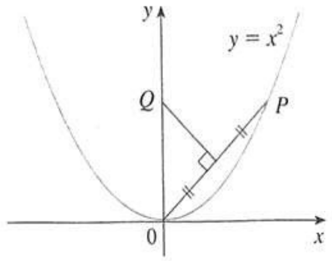
PROBLEMAS

1. Calcule $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

2. Encontre números a e b tais que $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$.

3. Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x}$.

4. A figura mostra um ponto P sobre a parábola $y = x^2$ e um ponto Q onde a perpendicular que bissecta OP e intercepta o eixo y. À medida que P tende à origem ao longo da parábola, o que acontece com Q? Ele tem uma posição-limite? Se sim, encontre-a.



5. Se $[\![x]\!]$ denota a função maior inteiro, encontre $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{[\![x]\!]}$.

6. Esboce a região do plano definida por cada uma das seguintes equações.

(a) $[\![x]\!]^2 + [\![y]\!]^2 = 1$ (b) $[\![x]\!]^2 - [\![y]\!]^2 = 3$ (c) $[\![x + y]\!]^2 = 1$ (d) $[\![x]\!] + [\![y]\!] = 1$

7. Encontre todos os valores de a para os quais f é contínua em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq a \\ x^2 & \text{se } x > a \end{cases}$$

8. Um **ponto fixo** de uma função f é um número c em seu domínio tal que $f(c) = c$. (A função não movimenta c; ele fica fixo.)

(a) Esboce o gráfico de uma função contínua com o domínio $[0, 1]$ cuja imagem também está em $[0, 1]$. Localize um ponto fixo de f.

(b) Tente fazer o gráfico de uma função contínua com o domínio $[0, 1]$ e a imagem em $[0, 1]$ que *não* tenha um ponto fixo. Qual é o obstáculo?

(c) Use o Teorema do Valor Intermediário para demonstrar que toda função contínua com o domínio $[0, 1]$ e a imagem em $[0, 1]$ deve ter um ponto fixo.

9. Se $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = 2$ e $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = 1$, encontre $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)]$.

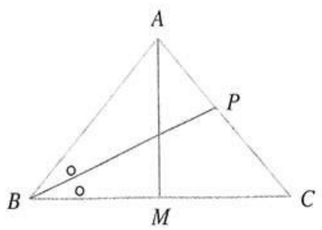


FIGURA PARA O PROBLEMA 10

10. (a) A figura mostra um triângulo isósceles ABC com $\angle B = \angle C$. A bissetriz do ângulo B intercepta o lado AC em um ponto P. Suponha que a base BC permaneça fixa, mas a altura $|AM|$ do triângulo tenda a 0, de forma que A tenda ao ponto médio M de BC. O que acontece com o ponto P durante esse processo? Ele tem uma posição-limite? Se sim, encontre-a.

(b) Tente esboçar a trajetória descrita por P durante esse processo. Então, encontre a equação dessa curva e use-a para esboçar a curva.

11. (a) Se começarmos da latitude 0° e procedermos na direção oeste, poderemos denotar $T(x)$ como a temperatura de um ponto x em um dado instante. Supondo que T é uma função contínua de x, mostre que a todo instante fixo existe pelo menos dois pontos diametralmente opostos sobre o Equador com exatamente a mesma temperatura.

(b) O resultado da parte (a) é verdadeiro para os pontos sobre qualquer círculo sobre a superfície da Terra?

(c) O resultado da parte (a) vale para a pressão barométrica e para a altitude?

12. Se f for uma função diferenciável e $g(x) = xf(x)$, use a definição de derivada para mostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

cu-
da

13. Suponha que f seja uma função que satisfaça a equação

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

para todos os números reais x e y. Suponha também que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(a) Encontre $f(0)$. (b) Encontre $f'(0)$. (c) Encontre $f'(x)$.

14. Suponha que f seja uma função com a propriedade $|f(x)| \leq x^2$ para todo x. Mostre que $f(0) = 0$. A seguir, mostre que $f'(0) = 0$.