MAT 2127 - Cálculo 2 para Química

Prova Substitutiva - 7 de dezembro de 2015

Questão 1. (a) Esboce a imagem da curva parametrizada $\gamma(t) = (\cos t, 1 + \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, assinalando na figura os pontos correspondentes a $t = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.
(b) Encontre uma função $f(x, y)$ tal que a imagem de γ seja uma curva de nível de f
– ou, em outras palavras, "elimine o t" em $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \operatorname{sen} t \end{cases}$.

`Solução`: (a) As seguintes informações devem estar aparentes no gráfico: a imagem de γ é uma circunferência de centro $(0, 1)$ e raio 1, $\gamma(0) = (1, 1)$, $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 2)$, $\gamma(\pi) = (-1, 1)$ e $\gamma(\frac{3\pi}{2}) = (0, 0)$.

(b) Se $x = \cos t$ e $y = 1 + \operatorname{sen} t$, então $x^2 + (y-1)^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$. Reciprocamente, se $x^2 + (y-1)^2 = 1$, então existe $t \in [0, 2\pi]$ tal que $x = \cos t$ e $y = 1 + \operatorname{sen} t$. Assim, a imagem de γ coincide com o conjunto dos pontos (x, y) tais que $x^2 + (y-1)^2 = 1$; logo, a imagem de γ é uma curva de nível da função $f(x, y) = x^2 + (y-1)^2$.

Questão 2. Seja C a interseção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ com o plano $z = 2y$.
(a) Parametrize C.
(b) Ache as equações paramétricas das retas tangentes a C nos pontos $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 2)$.

`Solução`: (a) Os pontos (x, y, z) de C são as soluções do sistema

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} 2y = x^2 + y^2 \\ z = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ z = 2y \end{cases}.$$

Daí segue que a curva C pode ser descrita como o conjunto dos pontos (x, y, z) tais que (x, y) pertence à circunferência de centro $(0, 1)$ e raio 1 e $z = 2y$. Como vimos na primeira quesão, a circunferência de centro $(0, 1)$ e raio 1 no plano xy pode ser parametrizada por $\gamma(t) = (\cos t, 1 + \operatorname{sen} t)$, $t \in 2\pi$. Usando que os pontos de C satisfazem $z = 2y$, vemos então que C pode ser parametrizada por $\eta(t) = (\cos t, 1 + \operatorname{sen} t, 2 + 2 \operatorname{sen} t)$, $t \in 2\pi$.

(b) Temos $\eta'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2 \cos t)$. Temos, portanto, $\eta(\frac{3\pi}{2}) = (0, 0, 0)$ e $\eta'(\frac{3\pi}{2}) = (1, 0, 0)$. Logo, a reta tangente a C no ponto $(0, 0, 0)$ pode ser parametrizada por $\lambda(t) = (t, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$. Temos, também, $\eta(0) = (1, 1, 2)$ e $\eta'(0) = (0, 1, 2)$. Logo, a reta tangente a C no ponto $(1, 1, 2)$ pode ser parametrizada por $\rho(t) = (1, 1 + t, 2 + 2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Questão 3. Ache a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \sin[(x^2+y^2)^{2/3}] + 2x - y$ no ponto $(0,0,0)$.

`Solução`: Temos $f(x,0) = \sin(x^{4/3}) + 2x$ e, portanto, $f_x(x,0) = \frac{4}{3}x^{1/3}\cos(x^{4/3}) + 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $f_x(0,0) = 2$. Analogamente, $f(0,y) = \sin(y^{4/3}) - y$, para todo $y \in \mathbb{R}$ e, portanto, $f_y(0,0) = -1$. Se soubermos que f tem derivadas contínuas na origem (e portanto é diferenciável nesse ponto), poderemos afirmar que a equação do plano tangente ao gráfico de f em $(0,0,0)$ é $z = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y$, ou seja, $z = 2x - y$, pois $f(0,0) = 0$. Para concluir a resolução do problema, basta portanto mostrar que as derivadas de f são contínuas em $(0,0)$.

Para tanto, note que $f(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$, para $g(x,y) = \sin[(x^2+y^2)^{2/3}]$ e $h(x,y) = 2x - y$. Como h tem derivadas parciais contínuas (as derivadas parciais de h são constantes), basta provar que g tem derivadas parciais contínuas em $(0,0)$, isto é, basta provar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_x(x,y) = g_x(0,0) \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} g_y(x,y) = g_y(0,0).$$

Com uma pequena modifição do argumento usado para mostrar que $f_x(0,0) = 2$ e $f_y(0,0) = -1$, vemos que $g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0$. Um cálculo direto mostra que, para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$g_x(x,y) = \frac{4x}{3(x^2+y^2)^{1/3}} \cdot \cos[(x^2+y^2)^{2/3}] \quad \text{e} \quad g_y(x,y) = \frac{4y}{3(x^2+y^2)^{1/3}} \cdot \cos[(x^2+y^2)^{2/3}].$$

Usando que o valor absoluto do cosseno é limitado por 1 e que $|x| \leq (x^2+y^2)^{1/2}$, vem

$$|g_x(x,y)| \leq \frac{4(x^2+y^2)^{1/2}}{3(x^2+y^2)^{1/3}} = \frac{4}{3}(x^2+y^2)^{1/6}.$$

Como $(x^2+y^2)^{1/6}$ tende a zero quando $(x,y) \to (0,0)$, segue que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_x(0,0) = 0 = g_x(0,0)$. Analogamente, temos

$$|g_y(x,y)| \leq \frac{4}{3}(x^2+y^2)^{1/6}$$

e, portanto, também a igualdade $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g_y(0,0) = g_y(0,0)$ é satisfeita, como queríamos.

Questão 4. (2 pts) Considere as retas R e S de equações paramétricas $\gamma(t) = (t, 1-t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, e $\mu(s) = (s, 2s, 1-s)$, $s \in \mathbb{R}$, respectivamente. Ache um ponto P em R e um ponto Q em R de modo que a distância de P a Q seja a menor possível.

`Solução`: Minimizar a distância de $\gamma(t)$ a $\mu(s)$ é equivalente a minimizar o quadrado da distância de $\gamma(t)$ a $\mu(s)$, que é dado por $f(s,t) = (s-t)^2 + (2s-1+t)^2 + (1-s)^2,\ (s,t) \in \mathbb{R}^2$. Se f possuir ponto de mínimo, ele ocorrerá num ponto em que $f_s(s,t) = f_t(s,t) = 0$. Isto ocorre se, e somente se,

$$\begin{cases} 2(s-t) + 4(2s-1+t) - 2(1-s) = 0 \\ -2(s-t) + 2(2s-1+t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 12s + 2t = 6 \\ 2s + 4t = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 6s + t = 3 \\ s + 2t = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6(1-2t)+t=3 \\ s=1-2t \end{cases} \iff \begin{cases} -11t=-3 \\ s=1-2t \end{cases} \iff \begin{cases} t=\frac{3}{11} \\ s=\frac{5}{11} \end{cases} .$$

Sejam agora $P=\gamma(\frac{3}{11})=(\frac{3}{11},\frac{8}{11},0)$ e $Q=\mu(\frac{5}{11})=(\frac{5}{11},\frac{10}{11},\frac{6}{11})$. Se o problema tiver solução, isto é, se existirem P em R e Q em S que minimizem a distância de um ponto de R a um ponto de S, esses pontos necessariamente serão $P=\gamma(\frac{3}{11})$ e $Q=\mu(\frac{5}{11})$. Vamos dar duas justificativas de por que esses pontos são de fato uma solução: uma justificativa puramente analítica e uma justificativa que apela para argumentos geométrico-vetoriais.

As derivadas parciais de segunda ordem de f são todas constantes: $f_{ss}=12$, $f_{tt}=4$, $f_{st}=f_{ts}=2$. Assim, o discriminante $D=f_{ss}f_{tt}-f_{st}^2=44$ é positivo e, portanto, o único ponto crítico de $f(s,t)$, $(\frac{5}{11},\frac{3}{11})$, é um ponto de mínimo local. Se um polinômio de segundo grau em duas variáveis possui um único ponto crítico e ele um ponto de mínimo local, então ele é um ponto de mínimo global. Isto é o que afirma o Problema 41a da Lista 3 de 2007 da Poli, que foi resolvido em sala pela Professora Leilá, na aula do dia 18 de novembro. Este é o argumento puramente analítico.

Pode-se argumentar, alternativamente, que um ponto P em R e um ponto Q em S serão uma solução do problema se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{PQ}$ for perpendicular, simultaneamente, às retas R e S, ou seja, ao vetores $(1,-1,0)$, que é paralelo a R, e $(1,2,-1)$, que é paralelo a S. Temos:

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{2}{11}(1,1,3),\quad \overrightarrow{PQ}\cdot(1,-1,0)=0 \quad\text{e}\quad \overrightarrow{PQ}\cdot(1,2,-1)=0,$$

confirmando assim que os pontos P e Q minimizam a distância entre dois pontos arbitrários de R e de S.

Questão 5. (2,5 pts) Considere a função $f(x,y)=xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
(a) Ache os pontos críticos de f.
(b) Ache o valor máximo de f no domínio $D=\{(x,y);\, x^2+y^2\leq 1\}$.

`Solução`: (a) Um cálculo direto leva a

$$f_x(x,y)=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}y(1-x^2) \quad\text{e}\quad f_y(x,y)=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}x(1-y^2).$$

Daí, $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ se, e somente se,

$$y(1-x^2)=x(1-y^2)=0.$$

É evidente que esta equação é satisfeita para $(x,y)=(0,0)$. Além disso, $(0,0)$ é a única solução com $x=0$ ou $y=0$. Cancelando-se o x e o y, vem que (x,y) é ponto crítico com $x\neq 0$ e $y\neq 0$ se, e somente se,

$$1-x^2=1-y^2=0,$$

ou seja, se, e somente se, (x,y) for igual a $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ ou $(1,-1)$.

Em resumo, mostramos que os pontos críticos de f são $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ e $(1,-1)$.

(b) Como f é contínua e D é fechado e limitado, f tem ponto de máximo em D. Se esse ponto de máximo ocorrer no interior, necessariamente será um ponto crítico. O único ponto crítico de f no interior de D é $(0,0)$, que não é ponto de máximo pois $f(0,0) = 0$ e $f(x,y) > 0$ para pontos (x,y) de D que satisfaçam $xy > 0$. Logo, o máximo de f em D ocorre na fronteira de D, que é o conjunto $C = \{(x,y);\ x^2 + y^2 = 1\}$.

Como C é uma curva de nível da função $g(x,y) = x^2 + y^2$, o máximo de f em C necessariamente ocorrerá em um ponto onde é satisfeita a equação $\nabla f = \lambda \nabla g$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ (note que $\nabla g = (2x, 2y)$ nunca se anula em C, que é uma condição necessária para que se possa aplicar este método). Queremos portanto encontrar os pontos (x,y) que satisfaçam

$$\begin{cases} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} y(1-x^2) = 2\lambda x \\ e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} x(1-y^2) = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$, as duas primeiras equações deste sistema implicam que (x,y) é um ponto crítico de f. Pelo que vimos no item (a), nenhum ponto crítico de f satisfaz $x^2+y^2 = 1$. Logo, λ não pode ser zero se o sistema for satisfeito. Se $x = 0$, e se a equação $x^2+y^2 = 1$ for satisfeita, então $y(1-x^2) \neq 0$ e portanto a primeira equação do sistema não será satisfeita, pois a exponencial também não é igual a zero. Analogamente, se $y = 0$, a segunda equação do sistema não será satisfeita. Logo, podemos operar com as equações do sistema sabendo de antemão que λ, x e y são diferentes de zero. As duas primeiras equações são portanto equivalentes a

$$\frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\lambda} = \frac{x}{y(1-x^2)} = \frac{y}{x(1-y^2)}$$

Isto permite "eliminar o λ". Ou seja, como não estamos interessados em achar o valor de λ, basta agora resolvermos o sistema de duas equações

$$\begin{cases} x^2(1-y^2) = y^2(1-x^2) \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - x^2y^2 = y^2 - y^2x^2 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \iff x^2 = y^2 = \frac{1}{2}.$$

Encontramos assim os seguintes candidatos a pontos de máximo de f em C (e, portanto, também em D): $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Como $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = (2\sqrt{e})^{-1}$ e $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -(2\sqrt{e})^{-1}$, segue que o valor máximo de f em D é igual a $\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$.

`Observação`: É possível também encontrar o valor máximo de f em D sem usar o método dos multiplicadores de Lagrange. Pode-se, por exemplo, parametrizar C e reduzir o problema original ao problema de maximizar a função de uma variável $\varphi(t) = f(\cos t, \sin t) = (2\sqrt{e})^{-1} \operatorname{sen}(2t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (verifique os detalhes). Esta é uma solução conceitualmente e também computacionalmente mais simples.