MAT 2110 - Cálculo I para Química - Prova Substitutiva - 29 de junho de 2015

Questão 1 (3 pts) Seja $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Discuta o sinal de $f'(x)$.

(b) Encontre os pontos críticos de f.

(c) Discuta o sinal de $f''(x)$.

(d) Encontre, se houver, os pontos de inflexão de f.

(e) Esboce o gráfico de f.

`Solução`: (a) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2)$. Logo, $f'(x) > 0$ se, e somente se, $x < 0$ ou $1 < x < 2$; e $f'(x) < 0$ se, e somente se, $0 < x < 1$ ou $x > 2$.

(b) Os pontos críticos de f são: 0 (mínimo local), 1 (máximo local) e 2 (mínimo local).

(c) $f''(x) = 12x^2 - 24x + 8$. As raízes de f'' são $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$. Entre as raízes, $f''(x) < 0$. Se $x > 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, então $f''(x) < 0$.

(d) Os pontos de inflexão são os pontos onde $f''(x)$ muda de sinal: $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\cdots$

Questão 2 (3 pts) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

(a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^2}$.

(b) Mostre que $f'(0) = 0$.

(c) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$.

(d) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

(e) Calcule $f''(0)$.

`Solução`: (a) Usando a regra de l'Hôpital e o limite fundamental $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$, vem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

(b) Pela definição de derivada e pelo resultado do item (a), vem:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} = 0$$

(c) Aplicando as regras de derivação, vem: $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$, $x \neq 0$.

(d) Usando a regra de l'Hôpital e o limite fundamental $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, vem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x}{3x^2} = -\frac{1}{3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = -\frac{1}{3}.$$

(e) Pela definição de derivada segunda e pelos resultados dos itens (b), (c) e (d), vem:

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} = -\frac{1}{3}.$$

Questão 3 (2 pts) Calcule: (a) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x\, dx$, (b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} t^2 \operatorname{sen} t\, dt$.

`Solução`: (a) Usando a fórmula de integração por partes

$$\int_0^{\pi} u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x)\, dx,$$

com $u(x) = x^2$, $v'(x) = \operatorname{sen} x$, $u'(x) = 2x$ e $v(x) = -\cos x$, vem:

$$\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} x\cos x\, dx = \pi^2 + 2\Big(x \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx\Big) = \pi^2 - 4.$$

Na segunda das igualdades acima, de novo integramos por partes, agora tomando $u(x) = x$ e $v'(x) = \cos x$. Usamos também que $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 2$.

(b) Pelo teorema fundamental do cálculo e pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} t^2 \operatorname{sen} t\, dt = (x^2)^2 \operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x = 2x^5 \operatorname{sen}(x^2).$$

...

Questão 4 (2 pts) Calcule a área da região do plano delimitada pela elipse de equação $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

`Solução`: A equação da elipse não muda se trocamos x por $-x$, nem se trocamos y por $-y$. Isso implica que a área total A da região delimitada pela elipse é igual a quatro vezes a área da parte dessa região que fica no primeiro quadrante. Esta, por sua vez, é a área que fica abaixo do gráfico da função $f(x) = 2\cdot\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}$, $0 \le x \le 3$, e acima do eixo dos x, ou seja,

$$A = 4\cdot\int_0^3 2\cdot\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^3}\, dx.$$

Esta integral pode ser resolvida fazendo a substituição $x = 3\operatorname{sen}\theta$, $dx = 3\cos\theta\, d\theta$. Note que, se θ varia de 0 a $\frac{\pi}{2}$, então $x = 3\operatorname{sen}\theta$ varia de 0 a 3. Daí,

$$\int_0^3 \sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^3}\, dx = 3\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}\cdot\cos\theta\, d\theta = 3\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta =$$

$$\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{3}{2}\left(\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{4}. \quad \text{Logo} \quad A = 6\pi.$$