14.1 EXERCÍCIOS

1. No Exemplo 2 consideramos a função $W = f(T, v)$, onde W era o índice de sensação térmica ocasionado pelo vento, T, a temperatura real e v, a velocidade do vento. A representação numérica foi fornecida pela Tabela 1.
   (a) Qual o valor de $f(-15, 40)$? Qual seu significado?
   (b) Descreva em palavras o significado da questão "Para quais valores de v é verdade que $f(-20, v) = -30$?". Em seguida, responda à questão.
   (c) Descreva o significado da questão "Para quais valores de T vale $f(T, 20) = -49$?". Em seguida, responda à questão.
   (d) Qual o significado da função $W = f(-5, v)$? Descreva o comportamento dessa função.
   (e) Qual o significado da função $W = f(T, 50)$? Descreva o comportamento dessa função.

2. *O índice I de temperatura-umidade* (ou simplesmente *humidex*) é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real é T e a umidade relativa é h, de modo que podemos escrever $I = f(T, h)$. A tabela seguinte com valores de I foi extraída de uma tabela do Environment Canada.

TABELA 3 Temperatura aparente como função da temperatura e da umidade

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C) T \ h	20	30	40	50	60	70
20	20	20	20	21	22	23
25	25	25	26	28	30	32
30	30	31	34	36	38	41
35	36	39	42	45	48	51
40	43	47	51	55	59	63

   (a) Qual é o valor de $f(35, 60)$? Qual é o seu significado?
   (b) Para que valor de h temos $f(30, h) = 36$?
   (c) Para que valor de T temos $f(T, 40) = 42$?
   (d) Qual o significado de $I = f(20, h)$ e $I = f(40, h)$? Compare o comportamento dessas duas funções de h.

3. Verifique que, para a função de produção de Cobb-Douglas
$$P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$$
discutida no Exemplo 3, a produção dobrará se as quantidades de trabalho e a de capital investido forem dobradas. Determine se isto também é verdade para uma função de produção genérica
$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

4. O índice de sensação térmica W discutido no Exemplo 2 foi modelado pela seguinte função:
$$W(T, v) = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$
Verifique quão próximo este modelo está dos valores da Tabela 1 para alguns valores de T e v.

5. A altura das ondas h em mar aberto depende da velocidade do vento v e do intervalo de tempo t no qual está ventando com a mesma velocidade. Os valores da função $h = f(v, t)$, dados em pés, são apresentados na tabela a seguir.
   (a) Qual é o valor de $f(80, 15)$? Qual é o seu significado?
   (b) Qual o significado da função $h = f(60, t)$? Descreva seu comportamento.
   (c) Qual o significado da função $h = f(v, 30)$? Descreva seu comportamento.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

6. Seja $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$.
   (a) Calcule $f(1, 1)$.
   (b) Calcule $f(e, 1)$.
   (c) Determine e esboce o domínio de f.
   (d) Determine a imagem de f.

7. Seja $f(x, y) = x^2e^{3xy}$.
   (a) Calcule $f(2, 0)$.
   (b) Determine o domínio de f.
   (c) Determine a imagem de f.

8. Determine e esboce o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{1 + x - y^2}$. Qual é a imagem de f?

9. Seja $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z - x^2 - y^2}}$.
   (a) Calcule $f(2, -1, 6)$.
   (b) Determine o domínio de f.
   (c) Determine a imagem f.

10. Seja $g(x, y, z) = \ln(25 - x^2 - y^2 - z^2)$.
   (a) Calcule $g(2, -2, 4)$.
   (b) Determine o domínio de g.
   (c) Determine a imagem de g.

11-20 Determine e faça o esboço do domínio da função.

11. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

12. $f(x, y) = \sqrt{xy}$

13. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

14. $f(x, y) = \sqrt{y - x}\ln(y + x)$

15. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

16. $f(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

17. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

18. $f(x, y) = \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2 - 2)$

19. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

20. $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

21-29 Esboce o gráfico da função.

21. $f(x, y) = 3$

22. $f(x, y) = y$

23. $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$

24. $f(x, y) = \cos x$

25. $f(x, y) = y^2 + 1$

26. $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$

27. $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

28. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$

29. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

30. Faça uma correspondência entre a função e seu gráfico (indicado por I-VI). Dê razões para sua escolha.

(a) $f(x, y) = |x| + |y|$

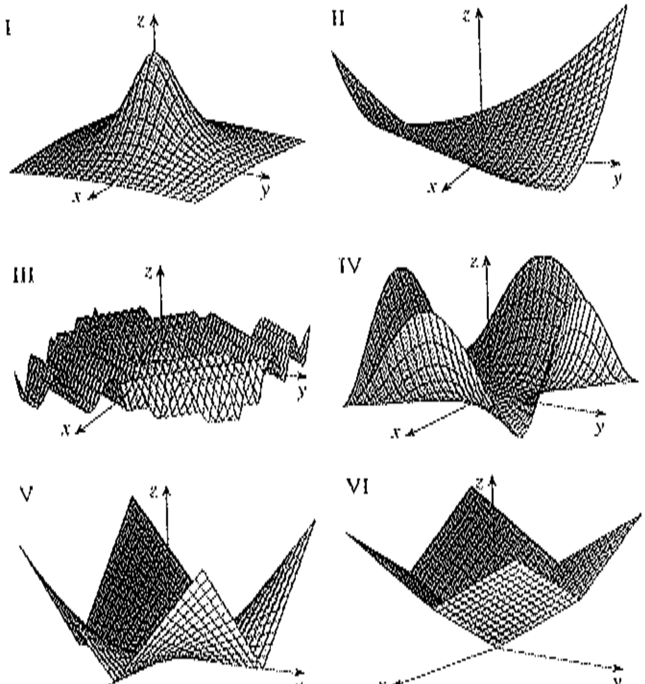
(b) $f(x, y) = |xy|$

(c) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$

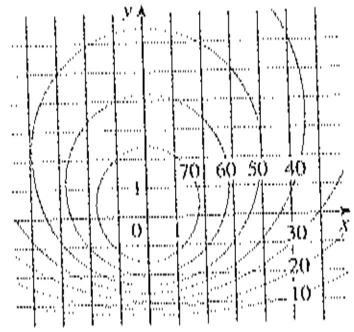
(d) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$

(e) $f(x, y) = (x - y)^2$

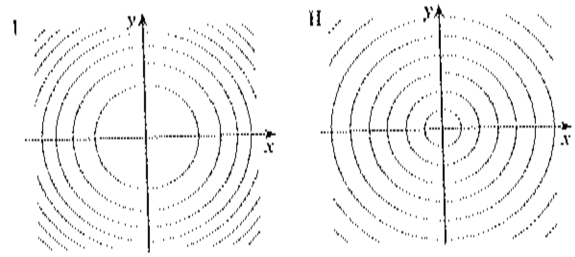
(f) $f(x, y) = \operatorname{sen}(|x| + |y|)$



31. É mostrado um mapa de contorno da função f. Use-o para estimar o valor de $f(-3, 3)$ e $f(3, -2)$. O que você pode dizer sobre a forma do gráfico?

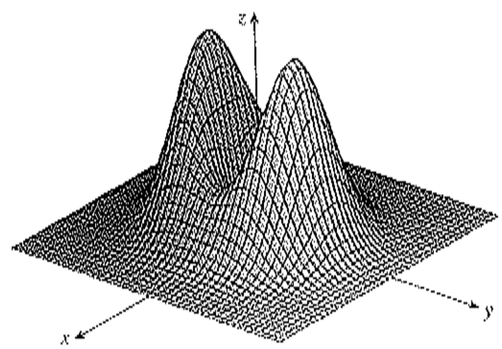


32. Dois mapas de contorno são mostrados na figura. Um é de uma função f cujo gráfico é um cone. O outro é de uma função g cujo gráfico é um paraboloide. Qual é qual? Por quê?



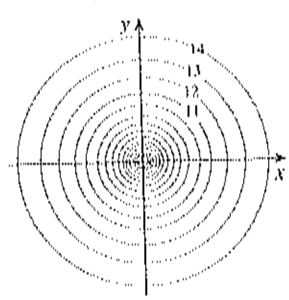
33. Localize os pontos A e B no mapa da Montanha Solitária (Figura 12). Como você descreveria o terreno perto de A? E perto de B?

34. Faça um esboço do diagrama de contorno da função cujo gráfico é mostrado.

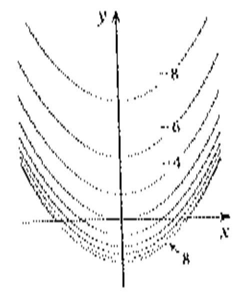


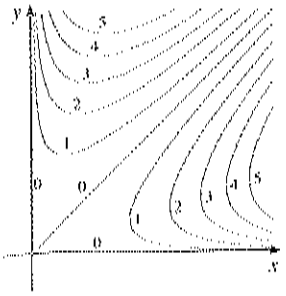
35-38 Um mapa de contorno de uma função é mostrado. Use-o para fazer um esboço do gráfico da f.

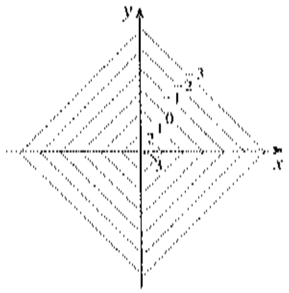
35.



36.



37. 

38. 

39–46 Faça o mapa de contorno da função mostrando várias curvas de nível.

39. $f(x, y) = (y - 2x)^2$

40. $f(x, y) = x^3 - y$

41. $f(x, y) = y - \ln x$

42. $f(x, y) = e^{y/x}$

43. $f(x, y) = ye^x$

44. $f(x, y) = y \sec x$

45. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

46. $f(x, y) = y/(x^2 + y^2)$

47–48 Faça o esboço do mapa de contorno e do gráfico da função e compare-os.

47. $f(x, y) = x^2 + 9y^2$

48. $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

49. Uma placa fina de metal, localizada no plano xy, tem temperatura $T(x, y)$ no ponto (x, y). As curvas de nível de T são chamadas *isotérmicas* porque todos os pontos em uma isotérmica têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função temperatura for dada por

$$T(x, y) = 100/(1 + x^2 + 2y^2)$$

50. Se $V(x, y)$ é o potencial elétrico de um ponto (x, y) do plano xy, as curvas de nível de V são chamadas *curvas equipotenciais*, porque nelas todos os pontos têm o mesmo potencial elétrico. Esboce algumas curvas equipotenciais de $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, onde c é uma constante positiva.

51–54 Use um computador para traçar o gráfico da função utilizando vários pontos de vista. Imprima a que, em sua opinião, oferece a melhor visão. Se seu programa também produz curvas de nível, trace o mapa de contorno da mesma função e compare.

51. $f(x, y) = e^{-x^2} + e^{-2y^2}$

52. $f(x, y) = (1 - 3x^2 + y^2)e^{1 - x^2 - y^2}$

53. $f(x, y) = xy^2 - x^3$ (sela do macaco)

54. $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ (sela do cachorro)

55–60 Faça uma correspondência entre a função (a) e seu gráfico (indicado por A-F na página 828), (b) e seus mapas de contorno (indicado por I-VI). Justifique sua escolha.

55. $z = \operatorname{sen}(xy)$

56. $z = e^x \cos y$

57. $z = \operatorname{sen}(x - y)$

58. $z = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y$

59. $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$

60. $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

61–64 Descreva as superfícies de nível da função.

61. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

62. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

63. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$

64. $f(x, y, z) = x^2 - y^2$

65–66 Descreva como o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f.

65. (a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$ (b) $g(x, y) = 2f(x, y)$
(c) $g(x, y) = -f(x, y)$ (d) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$

66. (a) $g(x, y) = f(x - 2, y)$ (b) $g(x, y) = f(x, y + 2)$
(c) $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$

67–68 Utilize um computador para traçar o gráfico da função, utilizando vários pontos de vista e tamanhos de janela. Imprima aquela que apresente melhor os "picos e vales". Você acha que essa função tem um valor máximo? Você poderia identificar os pontos do gráfico correspondentes aos "máximos locais"? E aos "mínimos locais"?

67. $f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$

68. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

69–70 Utilize um computador para traçar o gráfico da função, usando vários pontos de vista e tamanhos de janela. Comente o comportamento da função no limite. O que acontece quando x e y se tornam muito grandes? O que acontece quando (x, y) se aproxima da origem?

69. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$

70. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

71. Utilize um computador para estudar o comportamento da família de funções $f(x, y) = e^{cx^2 + y^2}$. Como a forma da função é afetada por uma mudança do valor de c?

72. Use um computador para investigar a família de superfícies

$$z = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$$

Como a forma do gráfico depende dos números a e b?

73. Use um computador para investigar a família de superfícies $z = x^2 + y^2 + cxy$. Em particular, você deve determinar os valores de transição para os quais a superfície muda de um tipo de superfície quádrica para outro.

74. Esboce o gráfico das funções

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

e

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Em geral, se g é uma função de uma variável, como obter o gráfico de

$$f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

a partir do gráfico de g?

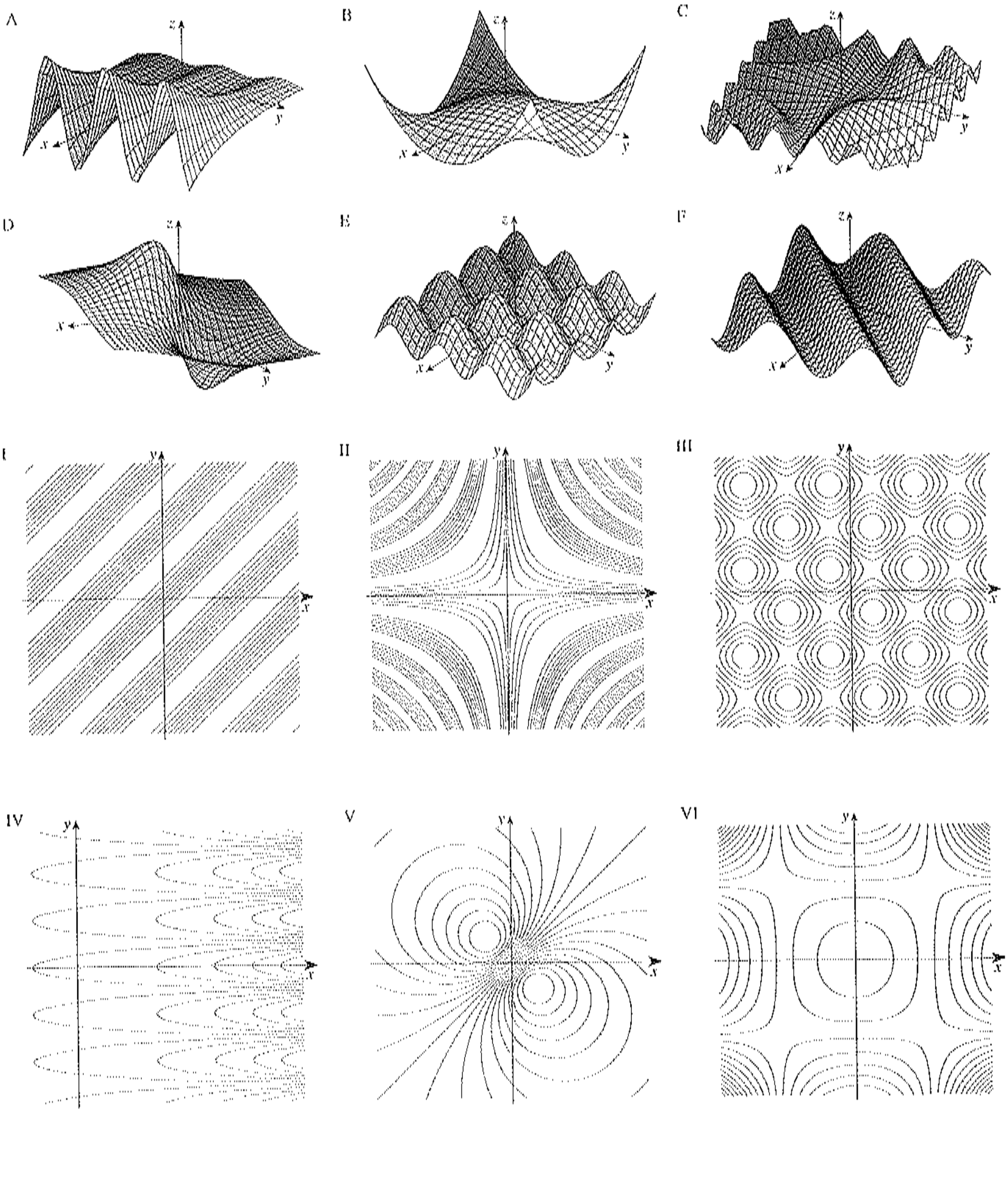
75. (a) Mostre que, tomando logaritmos, a função geral de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ pode ser expressa como

$$\ln \frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln \frac{L}{K}$$

(b) Se tomarmos $x = \ln(L/K)$ e $y = \ln(P/K)$, a equação da parte (a) se tornará uma equação linear $y = \alpha x + \ln b$. Utilize a Tabela 2 (do Exemplo 3) para fazer uma tabela de valores de $\ln(L/K)$ e $\ln(P/K)$ para os anos de 1899-1922. Use então um computador ou calculadora gráfica para achar, pelo método dos mínimos quadrados, a reta de regressão pelos pontos $(\ln(L/K), \ln(P/K))$.

(c) Deduza que a função de produção de Cobb-Douglas é $P = 1{,}01L^{0,75}K^{0,25}$.

Gráficos e Mapas de Contorno para os Exercícios 55–60



5 Se f é definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, então $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \text{ então } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

Observe que se $n = 1$, então $\mathbf{x} = x$ e $\mathbf{a} = a$, e (5) é exatamente a definição do limite para as funções de uma única variável. Para o caso $n = 2$, temos $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b \rangle$ e $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, de modo que (5) se torna a Definição 1. Se $n = 3$, então $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b, c \rangle$, e (5) é a definição de limite de uma função de três variáveis. Em cada caso, a definição de continuidade pode ser escrita como

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

14.2 EXERCÍCIOS

1. Suponha que $\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x,y) = 6$. O que podemos dizer do valor de $f(3, 1)$? E se a função f for contínua?

2. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
(a) A temperatura externa como função da latitude, da longitude e do tempo.
(b) A altura acima do nível do mar como função da longitude, da latitude e do tempo.
(c) O custo da tarifa do táxi como função da distância percorrida e do tempo gasto.

3-4 Utilize uma tabela de valores numéricos de $f(x, y)$ para (x, y) perto da origem para conjecturar sobre o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \to (0, 0)$. Em seguida, explique por que sua conjectura está correta.

3. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$ **4.** $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

5-22 Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

5. $\lim_{(x,y)\to(5,-2)} (x^5 + 4x^3y - 5xy^2)$ **6.** $\lim_{(x,y)\to(6,3)} xy\cos(x - 2y)$

7. $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$ **8.** $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\dfrac{1 + y^2}{x^2 + xy}\right)$

9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{x^4 + 3y^4}$ **10.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + \operatorname{sen}^2 y}{2x^2 + y^2}$

11. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy\cos y}{3x^2 + y^2}$ **12.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{6x^3y}{2x^4 + y^4}$

13. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **14.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

15. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2ye^y}{x^4 + 4y^2}$ **16.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 2y^2}$

17. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$ **18.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^4}{x^2 + y^8}$

19. $\lim_{(x,y,z)\to(3,0,1)} e^{-xy}\operatorname{sen}(\pi z/2)$ **20.** $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

21. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$ **22.** $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{yz}{x^2 + 4y^2 + 9z^2}$

23-24 Utilize um gráfico feito por computador para explicar por que o limite não existe.

23. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$

24. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$

25-26 Determine $h(x, y) = g(f(x, y))$ e o conjunto no qual h é contínua.

25. $g(t) = t^2 + \sqrt{t}$, $f(x,y) = 2x + 3y - 6$

26. $g(t) = t + \ln t$, $f(x,y) = \dfrac{1 - xy}{1 + x^2y^2}$

27-28 Trace o gráfico da função e observe onde ela é descontínua. Em seguida, utilize a fórmula para explicar o que você observou.

27. $f(x,y) = e^{1/(x-y)}$ **28.** $f(x,y) = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$

29-38 Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

29. $F(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y}$ **30.** $F(x,y) = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

31. $F(x,y) = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{y})$ **32.** $F(x,y) = e^{x^2y} + \sqrt{x + y^2}$

33. $G(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$ **34.** $G(x,y) = \operatorname{tg}^{-1}((x + y)^{-2})$

35. $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{y}}{x^2 - y^2 + z^2}$ **36.** $f(x,y,z) = \sqrt{x + y + z}$

37. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

38. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

39–41 Utilize coordenadas polares para determinar o limite. [Se (r, θ) são as coordenadas polares do ponto (x, y), com $r \geq 0$, observe que $r \to 0^+$ quando $(x, y) \to (0, 0)$.]

39. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

40. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

41. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

42. No início desta seção consideramos a função

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

e conjecturamos que $f(x, y) \to 1$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ com base em evidências numéricas. Utilize coordenadas polares para comprovar o valor do limite. Em seguida, faça o gráfico da função.

43. Trace o gráfico e analise a continuidade da função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy} & \text{se } xy \neq 0 \\ 1 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

44. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \quad \text{ou} \quad y \geq x^4 \\ 1 & \text{se } 0 < y < x^4 \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(x, y) \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ por qualquer caminho da forma $y = mx^a$ passando por $(0, 0)$ com $a < 4$.

(b) Apesar da parte (a), mostre que f é descontínua em $(0, 0)$.

(c) Mostre que f é descontínua em duas curvas inteiras.

45. Mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ é contínua em $\mathbb{R}^n$. [*Sugestão*: Considere $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$.]

46. Se $\mathbf{c} \in V_n$, mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ é contínua em $\mathbb{R}^n$.

14.3 DERIVADAS PARCIAIS

Em um dia quente, a umidade muito alta aumenta a sensação de calor, ao passo que, se o ar está muito seco, temos a sensação de temperatura mais baixa do que a indicada no termômetro. O Serviço Meteorológico do Canadá introduziu o *humidex* (ou índice de temperatura-umidade) para descrever os efeitos combinados da temperatura e umidade. O humidex I é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real for T e a umidade relativa for H. Deste modo, I é uma função de T e H e podemos escrever $I = f(T, H)$. A tabela de valores de I a seguir é a parte de uma tabela compilada pelo Serviço Meteorológico.

TABELA 1
Índice humidex I como função da temperatura e umidade

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C) T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Se nos concentrarmos na coluna assinalada da tabela que corresponde à umidade relativa de $H = 60\%$, estaremos considerando o humidex como uma função de uma única variável T para um valor fixado de H. Vamos escrever $g(T) = f(T, 60)$. Então, $g(T)$ descreve como o humidex I aumenta à medida que a temperatura real T aumenta quando a umidade relativa é 60%. A derivada de g quando $T = 30$ °C é a taxa de variação de I com relação a T quando $T = 30$ °C:

$$g'(30) = \lim_{h\to 0} \frac{g(30 + h) - g(30)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(30 + h, 60) - f(30, 60)}{h}$$

Observe que, pela Equação 8, se o trabalho e o capital são ambos aumentados por um fator m, temos

$$P(mL, mK) = b(mL)^\alpha(mK)^\beta = m^{\alpha+\beta}bL^\alpha K^\beta = m^{\alpha+\beta}P(L, K)$$

Se $\alpha + \beta = 1$, então $P(mL, mK) = mP(L, K)$, o que significa que a produção também é aumentada pelo fator m. Essa é a razão pela qual Cobb e Douglas supuseram que $\alpha + \beta = 1$ e, portanto,

$$P(L, K) = bL^\alpha K^{1-\alpha}$$

Essa é a função de produção de Cobb-Douglas, discutida na Seção 14.1.

14.3 EXERCÍCIOS

1. A temperatura T de uma localidade do Hemisfério Norte depende da longitude x, da latitude y e do tempo t, de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$. Vamos medir o tempo em horas a partir do início de janeiro.
   (a) Qual é o significado das derivadas parciais $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ e $\partial T/\partial t$?
   (b) Honolulu tem longitude de 158° W e latitude de 21° N. Suponha que às 9 horas em 1° de janeiro esteja ventando para noroeste uma brisa quente, de forma que a oeste e a sul o ar esteja quente e a norte e leste o ar esteja mais frio. Você esperaria que $f_x(158, 21, 9)$, $f_y(158, 21, 9)$ e $f_t(158, 21, 9)$ fossem positivas ou negativas? Explique.

2. No começo desta seção discutimos a função $I = f(T, H)$, onde I era o humidex; T, a temperatura; e H, a umidade relativa. Utilize a Tabela 1 para estimar $f_T(34, 75)$ e $f_H(34, 75)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

3. O índice de sensação térmica W é a temperatura sentida quando a temperatura real é T e a velocidade do vento, v. Portanto, podemos escrever $W = f(T, v)$. A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1.

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C) T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

   (a) Estime os valores de $f_T(-15, 30)$ e $f_v(-15, 30)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?
   (b) Em geral, o que se pode dizer sobre o sinal de $\partial W/\partial T$ e $\partial W/\partial v$?
   (c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{v \to \infty} \frac{\partial W}{\partial v}$$

4. A altura h das ondas em mar aberto depende da velocidade v do vento e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela velocidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados em pés na tabela.

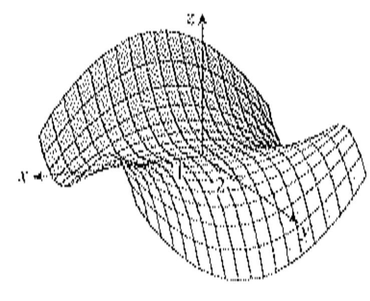
Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

   (a) Qual o significado das derivadas parciais $\partial h/\partial v$ e $\partial h/\partial t$?
   (b) Estime os valores de $f_v(80, 15)$ e $f_t(80, 15)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?
   (c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

5–8 Determine os sinais das derivadas parciais da função f cujo gráfico está mostrado.



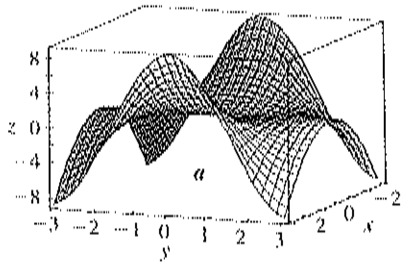
5. (a) $f_x(1, 2)$ (b) $f_y(1, 2)$

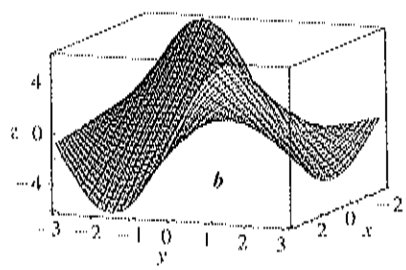
6. (a) $f_x(-1, 2)$ (b) $f_y(-1, 2)$

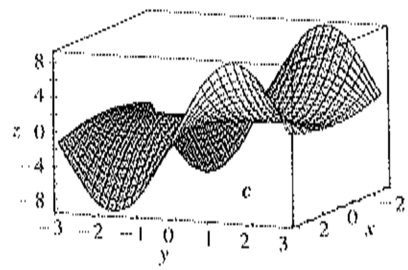
7. (a) $f_{xx}(-1, 2)$ (b) $f_{xy}(-1, 2)$

8. (a) $f_{yy}(1, 2)$ (b) $f_{xy}(-1, 2)$

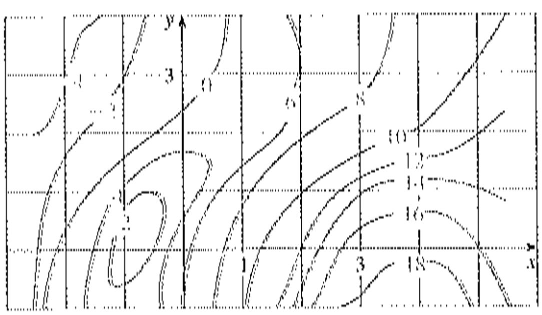
9. As seguintes superfícies, rotuladas a, b e c são gráficos de uma função f e de suas derivadas parciais f_x e f_y. Identifique cada superfície e dê razões para sua escolha.







10. É dado o mapa de contorno de uma função f. Use-o para estimar $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.



11. Se $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

12. Se $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, determine $f_x(1, 0)$ e $f_y(1, 0)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

13-14 Determine f_x e f_y e faça os gráficos de f, f_x e f_y com domínios e pontos de vista que lhe permitam ver a relação entre eles.

13. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y$ **14.** $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$

15-38 Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

15. $f(x, y) = 3x - 2y^4$

16. $f(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$

17. $z = xe^{3y}$ **18.** $f(x, y) = \sqrt{x} \ln t$

19. $z = (2x + 3y)^{10}$ **20.** $z = \text{tg}\, xy$

21. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ **22.** $f(x, y) = x^y$

23. $w = \text{sen}\, \alpha \cos \beta$ **24.** $w = e^v/(u + v^2)$

25. $f(r, s) = r \ln(r^2 + s^2)$ **26.** $f(x, t) = \text{arctg}\,(x\sqrt{t})$

27. $u = te^{w/t}$ **28.** $f(x, y) = \int_y^x \cos(t^2)\, dt$

29. $f(x, y, z) = xz - 5x^2y^3z^4$ **30.** $f(x, y, z) = x\, \text{sen}(y - z)$

31. $w = \ln(x + 2y + 3z)$ **32.** $w = ze^{xyz}$

33. $u = xy\, \text{sen}^{-1}(yz)$ **34.** $u = x^{y/z}$

35. $f(x, y, z, t) = xyz^2\, \text{tg}(yt)$ **36.** $f(x, y, z, t) = \dfrac{xy^2}{t + 2z}$

37. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

38. $u = \text{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

39-42 Determine as derivadas parciais indicadas.

39. $f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; $f_x(3, 4)$

40. $f(x, y) = \text{arctg}\,(x/y)$; $f_x(2, 3)$

41. $f(x, y, z) = \dfrac{y}{x + y + z}$; $f_y(2, 1, -1)$

42. $f(x, y, z) = \sqrt{\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y + \text{sen}^2 z}$; $f_z(0, 0, \pi/4)$

43-44 Use a definição de derivadas parciais como limites (4) para encontrar $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

43. $f(x, y) = x^2y - x^3y$ **44.** $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y^2}$

45-48 Use a derivação implícita para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

45. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ **46.** $yz = \ln(x + z)$

47. $x - z = \text{arctg}(yz)$ **48.** $\text{sen}(xyz) = x + 2y + 3z$

49-50 Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

49. (a) $z = f(x) + g(y)$ (b) $z = f(x + y)$

50. (a) $z = f(x)g(y)$ (b) $z = f(xy)$
(c) $z = f(x/y)$

51-56 Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem.

51. $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$ **52.** $f(x, y) = \text{sen}^2(mx + ny)$

53. $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ **54.** $v = \dfrac{xy}{x - y}$

55. $z = \text{arctg}\, \dfrac{x + y}{1 - xy}$ **56.** $v = e^{xe^y}$

57–60 Verifique que a conclusão do Teorema de Clairaut é válida, isto é, $u_{xy} = u_{yx}$.

57. $u = x\,\text{sen}(x + 2y)$ **58.** $u = x^4y^2 - 2xy^5$

59. $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ **60.** $u = xye^y$

61–68 Determine as derivadas parciais indicadas.

61. $f(x, y) = 3xy^4 + x^3y^2$; f_{xxy}, f_{yyy}

62. $f(x, t) = x^2e^{-ct}$; f_{ttt}, f_{txx}

63. $f(x, y, z) = \cos(4x + 3y + 2z)$; f_{xyz}, f_{yzz}

64. $f(r, s, t) = r\ln(rs^2t^3)$; f_{rss}, f_{rst}

65. $u = e^{r\theta}\,\text{sen}\,\theta$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2\,\partial\theta}$

66. $z = u\sqrt{v - w}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial u\,\partial v\,\partial w}$

67. $w = \dfrac{x}{y + 2z}$; $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial y\,\partial x}$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}$

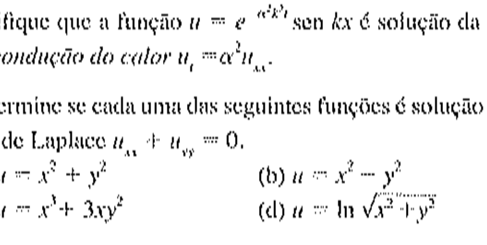
68. $u = x^ay^bz^c$; $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x\,\partial y^2\,\partial z^3}$

69. Use a tabela de valores de $f(x, y)$ para estimar os valores de $f_x(3, 2)$, $f_x(3, 2{,}2)$ e $f_{xy}(3, 2)$.

x \ y	1,8	2,0	2,2
2,5	12,5	10,2	9,3
3,0	18,1	17,5	15,9
3,5	20,0	22,4	26,1

70. São mostradas as curvas de nível de uma função f. Determine se as seguintes derivadas parciais são positivas ou negativas no ponto P.

(a) f_x (b) f_y (c) f_{xx}
(d) f_{xy} (e) f_{yy}



71. Verifique que a função $u = e^{-\alpha^2k^2t}\,\text{sen}\,kx$ é solução da *equação de condução do calor* $u_t = \alpha^2u_{xx}$.

72. Determine se cada uma das seguintes funções é solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(a) $u = x^2 + y^2$ (b) $u = x^2 - y^2$
(c) $u = x^3 + 3xy^2$ (d) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
(e) $u = \text{sen}\,x\cosh y + \cos x\,\text{senh}\,y$
(f) $u = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$

73. Verifique que a função $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é uma solução da equação de Laplace tridimensional $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

74. Mostre que cada uma das seguintes funções é uma solução da equação da onda $u_{tt} = a^2u_{xx}$.

(a) $u = \text{sen}(kx)\,\text{sen}(akt)$
(b) $u = t/(a^2t^2 - x^2)$
(c) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$
(d) $u = \text{sen}(x - at) + \ln(x + at)$

75. Se f e g são funções duas vezes diferenciáveis de uma única variável, mostre que a função

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

é solução da equação de onda dada no Exercício 74.

76. Se $u = e^{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}$, onde $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

77. Verifique que a função $z = \ln(e^x + e^y)$ é uma solução das equações diferenciais

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

e

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0$$

78. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas $P = bL^\alpha K^\beta$ satisfaz a equação

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

79. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas satisfaz $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^\alpha$ resolvendo a equação diferencial

$$\frac{dP}{dL} = \alpha\frac{P}{L}$$

(Veja a Equação 5.)

80. A temperatura em um ponto (x, y) de uma chapa de metal é dada por $T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2)$, onde T é medido em °C e x, y em metros. Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $(1, 2)$ (a) com relação a x e (b) com relação a y.

81. A resistência total R produzida por três condutores com resistência R_1, R_2 e R_3 conectados em paralelo em um circuito elétrico é dada pela fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Determine $\partial R/\partial R_1$.

82. A lei dos gases para uma massa fixa m de um gás ideal à temperatura absoluta T, pressão P e volume V é $PV = mRT$, onde R é a constante do gás. Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

83. Para o gás ideal do Exercício 82, mostre que

$$T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = mR$$

84. O índice sensação térmica é modelado pela função

$$W = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$

onde T é a temperatura (°C) e v, a velocidade do vento (km/h). Quando $T = -15$ °C e $v = 30$ km/h, quanto você espera que a temperatura aparente caia se a temperatura real decrescer em 1 °C? E se a velocidade do vento aumentar em 1 km/h?

85. A energia cinética de um corpo com massa m e velocidade v é $K = \frac{1}{2}mv^2$. Mostre que

$$\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

86. Se a, b e c são os lados de um triângulo e A, B e C são os ângulos opostos, determine $\partial A/\partial a$, $\partial A/\partial b$ e $\partial A/\partial c$ pela derivação implícita da Lei dos Cossenos.

87. Disseram-lhe que existe uma função f cujas derivadas parciais são $f_x(x, y) = x + 4y$ e $f_y(x, y) = 3x - y$ e cujas derivadas parciais de segunda ordem são contínuas. Você deve acreditar nisso?

88. O paraboloide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ intercepta o plano $x = 1$ em uma parábola. Determine as equações paramétricas para a reta tangente a essa parábola no ponto $(1, 2, -4)$. Use um computador para fazer o gráfico do paraboloide, da parábola e da reta tangente em uma mesma tela.

89. O elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ intercepta o plano $y = 2$ em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente à elipse no ponto $(1, 2, 2)$.

90. No estudo de penetração do congelamento descobriu-se que a temperatura T no instante t (medido em dias) a uma profundidade x (medida em pés) pode ser modelada pela função

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$$

onde $\omega = 2\pi/365$ e λ é uma constante positiva.

(a) Determine $\partial T/\partial x$. Qual seu significado físico?

(b) Determine $\partial T/\partial t$. Qual seu significado físico?

(c) Mostre que T satisfaz a equação do calor $T_t = kT_{xx}$ para uma certa constante k.

(d) Se $\lambda = 0{,}2$, $T_0 = 0$ e $T_1 = 10$, use um computador para traçar o gráfico de $T(x, t)$.

(e) Qual é o significado físico do termo $-\lambda x$ na expressão $\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$?

91. Utilize o Teorema de Clairaut para mostrar que, se as derivadas parciais de terceira ordem de f forem contínuas, então

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

92. (a) Quantas derivadas de n-ésima ordem tem uma função de duas variáveis?

(b) Se essas derivadas parciais forem contínuas, quantas delas podem ser distintas?

(c) Responda a parte (a) da questão para uma função de três variáveis.

93. Se $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2}e^{\operatorname{sen}(x^2 y)}$, determine $f_x(1, 0)$. [*Sugestão*: Em vez de achar $f_x(x, y)$ primeiro, observe que é mais fácil utilizar a Equação 1 ou a Equação 2.]

94. Se $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, determine $f_x(0, 0)$.

95. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Use um computador para traçar o gráfico de f.

(b) Determine $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ quando $(x, y) \neq (0, 0)$.

(c) Determine $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ usando as Equações 2 e 3.

(d) Mostre que $f_{xy}(0, 0) = -1$ e $f_{yx}(0, 0) = 1$.

(e) O resultado da parte (d) contradiz o Teorema de Clairaut? Use os gráficos de f_{xy} e f_{yx} para ilustrar sua resposta.

14.4 PLANOS TANGENTES E APROXIMAÇÕES LINEARES

Uma das ideias mais importantes em cálculo de funções com uma única variável é que, à medida que damos *zoom* em torno de um ponto no gráfico de uma função diferenciável, esse gráfico vai se tornando indistinguível de sua reta tangente, e podemos aproximar a função por uma função linear (veja a Seção 3.10, no Volume I). Desenvolveremos ideias semelhantes em três dimensões. À medida que damos *zoom* em torno de um ponto na superfície que é o gráfico de uma função diferenciável de duas variáveis, essa superfície parece mais e mais com um plano (seu plano tangente) e podemos aproximar a função, nas proximidades do ponto, por uma função linear de duas variáveis. Estenderemos também a ideia de diferencial para as funções de duas ou mais variáveis.

Foi-nos dado que $|\Delta x| \leqslant 0{,}2$, $|\Delta y| \leqslant 0{,}2$ e $|\Delta z| \leqslant 0{,}2$. Para determinar o maior erro no volume, usamos $dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}2$ e $dz = 0{,}2$ em conjunto com $x = 75$, $y = 60$ e $z = 40$:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0{,}2) + (75)(60)(0{,}2) = 1\,980$$

Portanto, um erro de apenas 0,2 cm nas medidas de cada dimensão pode nos levar a um erro da ordem de 1 980 cm^3 no cálculo do volume! Isso pode parecer um erro muito grande, mas, na verdade, é um erro de apenas cerca de 1% do volume da caixa.

14.4 EXERCÍCIOS

1-6 Determine uma equação do plano tangente à superfície no ponto especificado.

1. $z = 4x^2 - y^2 + 2y$, $(-1, 2, 4)$
2. $z = 3(x-1)^2 + 2(y+3)^2 + 7$, $(2, -2, 12)$
3. $z = \sqrt{xy}$, $(1, 1, 1)$
4. $z = y \ln x$, $(1, 4, 0)$
5. $z = y\cos(x - y)$, $(2, 2, 2)$
6. $z = e^{x^2 - y^2}$, $(1, -1, 1)$

7-8 Desenhe a superfície e o plano tangente no ponto dado. (Escolha o domínio e o ponto de vista de modo a ver tanto a superfície quanto o plano tangente.) Em seguida, dê *zoom* até que a superfície e o plano tangente perto do ponto se tornem indistinguíveis.

7. $z = x^2 + xy + 3y^2$, $(1, 1, 5)$
8. $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$, $(1, 1, \pi/4)$

9-10 Desenhe o gráfico de f e de seu plano tangente no ponto dado. (Utilize um sistema de computação algébrica tanto para calcular as derivadas parciais quanto para traçar os gráficos da função e de seu plano tangente.) Em seguida, dê *zoom* até que a superfície e o plano tangente se tornem indistinguíveis.

9. $f(x, y) = \dfrac{xy\,\operatorname{sen}(x - y)}{1 + x^2 + y^2}$, $(1, 1, 0)$
10. $f(x, y) = e^{-xy/10}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy})$, $(1, 1, 3e^{-0{,}1})$

11-16 Explique por que a função é diferenciável no ponto dado. A seguir, encontre a linearização $L(x, y)$ da função naquele ponto.

11. $f(x, y) = x\sqrt{y}$, $(1, 4)$
12. $f(x, y) = x^3y^4$, $(1, 1)$
13. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$, $(2, 1)$
14. $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}$, $(3, 0)$
15. $f(x, y) = e^{-xy}\cos y$, $(\pi, 0)$
16. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y)$, $(-3, 2)$

17-18 Verifique a aproximação linear em $(0, 0)$.

17. $\dfrac{2x + 3}{4y + 1} \approx 3 + 2x - 12y$
18. $\sqrt{y + \cos^2 x} \approx 1 + \frac{1}{2}y$

19. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ em $(2, 1)$ e use-a para aproximar $f(1{,}95, 1{,}08)$.

20. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \ln(x - 3y)$ em $(7, 2)$ e use-a para aproximar $f(6{,}9, 2{,}06)$. Ilustre, traçando o gráfico da função e do plano tangente.

21. Determine a aproximação linear da função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ em $(3, 2, 6)$ e use-a para aproximar o número $\sqrt{(3{,}02)^2 + (1{,}97)^2 + (5{,}99)^2}$.

22. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados na seguinte tabela.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h) — v \ t	5	10	15	20	30	40	50
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

Use a tabela para determinar uma aproximação linear da função altura da onda quando v está próximo de 80 km/h e t está próximo de 20 horas. Em seguida, estime a altura das ondas quando está ventando por 24 horas a 84 km/h.

23. Utilize a tabela do Exemplo 3 para encontrar a aproximação linear da função humidex quando a temperatura está próxima de 32 °C e a umidade relativa do ar é de aproximadamente 65%. Estime também o humidex quando a temperatura é de 33 °C e a umidade relativa, 63%.

24. O índice de sensação térmica W é a temperatura que se sente quando a temperatura real for T e a velocidade do vento, v; por-

tanto, podemos escrever $W = f(T, v)$. A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1.

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C) T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

Use essa tabela para determinar a aproximação linear da função de sensação térmica quando T estiver a −15 °C e v estiver próximo de 50 km/h. Estime, a seguir, a sensação térmica quando a temperatura estiver a −17 °C e a velocidade do vento for de 55 km/h.

25–30 Determine a diferencial da função.

25. $z = x^3 \ln(y^2)$ **26.** $v = y \cos xy$

27. $m = p^5 q^3$ **28.** $T = \dfrac{v}{1 + uvw}$

29. $R = \alpha\beta^2 \cos \lambda$ **30.** $w = xye^{xz}$

31. Se $z = 5x^2 + y^2$ e (x, y) varia de $(1, 2)$ a $(1{,}05, 2{,}1)$, compare os valores de Δz e dz.

32. Se $z = x^2 - xy + 3y^2$ e (x, y) varia de $(3, -1)$ a $(2{,}96, -0{,}95)$, compare os valores de Δz e dz.

33. O comprimento e a largura de um retângulo foram medidos como 30 cm e 24 cm, respectivamente, com um erro de medida de, no máximo, 0,1 cm. Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da área do retângulo.

34. As dimensões de uma caixa retangular fechada foram medidas como 80 cm, 60 cm e 50 cm, respectivamente, com erro máximo de 0,2 cm em cada dimensão. Utilize os diferenciais para estimar o erro máximo no cálculo da área da superfície da caixa.

35. Utilize diferenciais para estimar a quantidade de estanho em uma lata cilíndrica fechada com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura se a espessura da folha de estanho for de 0,04 cm.

36. Use diferenciais para estimar a quantidade de metal em uma lata cilíndrica fechada de 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro se o metal das tampas de cima e de baixo possui 0,1 cm de espessura e o das laterais tem espessura de 0,05 cm.

37. Uma faixa interna de 8 cm de largura é pintada na borda de um retângulo de dimensões 30 m por 60 m. Utilize os diferenciais para aproximar a área, em metros quadrados, da faixa pintada.

38. A pressão, o volume e a temperatura de um mol de um gás ideal estão relacionados pela equação $PV = 8{,}31T$, onde P é medida em quilopascals, V em litros e T em kelvins. Utilize diferenciais para determinar a variação aproximada da pressão se o volume aumenta de 12 L para 12,3 L e a temperatura diminui de 310 K para 305 K.

39. Se R é a resistência equivalente de três resistores conectadas em paralelo, com resistências R_1, R_2 e R_3, então

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Se as resistências medem em ohms $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 40\Omega$ e $R_3 = 50\ \Omega$, com margem de erro de 0,5% em cada uma, estime o erro máximo no valor calculado de R.

40. Quatro números positivos, cada um menor que 50, são arredondados até a primeira casa decimal e depois multiplicados. Utilize os diferenciais para estimar o máximo erro possível no cálculo do produto que pode resultar do arredondamento.

41. Um modelo para a área da superfície do corpo humano é dado por $S = 72{,}09w^{0{,}425}\, h^{0{,}725}$, onde w é o peso (em quilogramas), h é a altura (em centímetros) e S é medida em centímetros quadrados. Se os erros nas medidas de w e h forem no máximo de 2%, use diferenciais para estimar a porcentagem de erro máxima na área da superfície calculada.

42. Suponha que você precise saber uma equação do plano tangente à superfície S no ponto $P(2, 1, 3)$. Você não tem uma equação para S, mas sabe que as curvas

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle 2 + 3t, 1 - t^2, 3 - 4t + t^2 \rangle$$

$$\mathbf{r}_2(u) = \langle 1 + u^2, 2u^3 - 1, 2u + 1 \rangle$$

estão ambas em S. Encontre uma equação para o plano tangente em P.

43–44 Mostre que a função é diferenciável achando valores ε_1 e ε_2 que satisfaçam à Definição 7.

43. $f(x, y) = x^2 + y^2$ **44.** $f(x, y) = xy - 5y^2$

45. Demonstre que, se f é uma função de duas variáveis diferenciável em (a, b), então f é contínua em (a, b). *Sugestão*: Mostre que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b)$$

46. (a) A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

corresponde ao gráfico da Figura 4. Mostre que $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ existem, mas f não é diferenciável em $(0, 0)$. [*Sugestão*: Utilize o resultado do Exercício 45.]

(b) Explique por que f_x e f_y não são contínuas em $(0, 0)$.

nessa bola, então a equação $F(x, y) = 0$ define y como uma função de x perto do ponto (a, b) e a derivada dessa função é dada pela Equação 6.

EXEMPLO 8 Determine y' se $x^3 + y^3 = 6xy$.

SOLUÇÃO A equação dada pode ser escrita como

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

e, dessa forma, a Equação 6 nos dá

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

» A solução do Exemplo 8 deve ser comparada com a do Exemplo 2 da Seção 3.5, no Volume I.

Suponha agora que z seja dado implicitamente como uma função $z = f(x, y)$ por uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$. Isso é o mesmo que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) no domínio de f. Se F e f forem diferenciáveis, utilizamos a Regra da Cadeia para derivar a equação $F(x, y, z) = 0$ da seguinte forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Mas, $\quad \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \quad$ e $\quad \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$

portanto, essa equação se torna

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Se $\partial F/\partial z \neq 0$, isolamos $\partial z/\partial x$ e obtemos a primeira fórmula das Equações 7. A fórmula para $\partial z/\partial y$ é obtida de modo semelhante.

7
$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}}$$

Novamente, uma versão do **Teorema da Função Implícita** nos dá as condições sob as quais nossa hipótese é válida: se F é definida dentro de uma esfera contendo (a, b, c), onde $F(a, b, c) = 0$, $F_z(a, b, c) \neq 0$ e F_x, F_y e F_z são contínuas dentro da esfera, então a equação $F(x, y, z) = 0$ define z como uma função de x e y perto do ponto (a, b, c), e as derivadas parciais dessa função são dadas por (7).

EXEMPLO 9 Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

SOLUÇÃO Seja $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Então, das Equações 7, temos

» A solução do Exemplo 9 deve ser comparada com a do Exemplo 4 na Seção 14.3.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

14.5 EXERCÍCIOS

1–6 Use a Regra da Cadeia para determinar dz/dt ou dw/dt.

1. $z = x^2y + xy^2$, $\quad x = 2 + t^4$, $\quad y = 1 - t^3$

2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad x = e^{2t}$, $\quad y = e^{-2t}$

3. $z = \operatorname{sen} x \cos y$, $\quad x = \pi t$, $\quad y = \sqrt{t}$

4. $z = \operatorname{tg}^{-1}(x/y)$, $\quad x = e^t$, $\quad y = 1 - e^{-t}$

5. $w = xe^{y/z}$, $\quad x = t^2$, $\quad y = 1 - t$, $\quad z = 1 + 2t$

6. $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\quad x = \operatorname{sen} t$, $\quad y = \cos t$, $\quad z = \operatorname{tg} t$

7–12 Utilize a Regra da Cadeia para determinar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

7. $z = x^2y^3$, $\quad x = s\cos t$, $\quad y = s \operatorname{sen} t$

8. $z = \operatorname{arcsen}(x - y)$, $\quad x = s^2 + t^2$, $\quad y = 1 - 2st$

9. $z = \operatorname{sen}\theta\cos\phi$, $\quad \theta = st^2$, $\quad \phi = s^2t$

10. $z = e^{x+2y}$, $\quad x = s/t$, $\quad y = t/s$

11. $z = e^r\cos\theta$, $\quad r = st$, $\quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

12. $z = \operatorname{tg}(u/v)$, $\quad u = 2s + 3t$, $\quad v = 3s - 2t$

13. Se $z = f(x, y)$, onde f é diferenciável, e

$$x = g(t) \qquad y = h(t)$$
$$g(3) = 2 \qquad h(3) = 7$$
$$g'(3) = 5 \qquad h'(3) = -4,$$
$$f_x(2, 7) = 6 \qquad f_y(2, 7) = -8$$

determine dz/dt quando $t = 3$.

14. Seja $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, onde F, u, e v são diferenciáveis, e

$$u(1, 0) = 2 \qquad v(1, 0) = 3$$
$$u_s(1, 0) = -2, \qquad v_s(1, 0) = 5$$
$$u_t(1, 0) = 6 \qquad v_t(1, 0) = 4,$$
$$F_u(2, 3) = -1 \qquad F_v(2, 3) = 10$$

Determine $W_s(1, 0)$ e $W_t(1, 0)$.

15. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(u, v) = f(e^u + \operatorname{sen} v, e^u + \cos v)$. Use a tabela de valores para calcular $g_u(0, 0)$ e $g_v(0, 0)$.

	f	g	f_x	f_y
$(0, 0)$	3	6	4	8
$(1, 2)$	6	3	2	5

16. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Use a tabela de valores do Exercício 15 para calcular $g_r(1, 2)$ e $g_s(1, 2)$.

17–20 Utilize um diagrama em árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso dado. Suponha que todas as funções sejam diferenciáveis.

17. $u = f(x, y)$, $\quad$ onde $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$

18. $R = f(x, y, z, t)$, $\quad$ onde $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, $t = t(u, v, w)$

19. $w = f(r, s, t)$, $\quad$ onde $r = r(x, y)$, $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$

20. $t = f(u, v, w)$, $\quad$ onde $u = u(p, q, r, s)$, $v = v(p, q, r, s)$, $w = w(p, q, r, s)$

21–26 Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

21. $z = x^2 + xy^3$, $\quad x = uv^2 + w^3$, $\quad y = u + ve^w$;

$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2$, $\quad v = 1$, $\quad w = 0$

22. $u = \sqrt{r^2 + s^2}$, $\quad r = y + x\cos t$, $\quad s = x + y\operatorname{sen} t$;

$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$ quando $x = 1$, $\quad y = 2$, $\quad t = 0$

23. $R = \ln(u^2 + v^2 + w^2)$, $\quad u = x + 2y$, $\quad v = 2x - y$, $w = 2xy$;

$\dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial R}{\partial y}$ quando $x = y = 1$

24. $M = xe^{y - z^2}$, $x = 2uv$, $\quad y = u - v$, $\quad z = u + v$;

$\dfrac{\partial M}{\partial u}, \dfrac{\partial M}{\partial v}$, quando $u = 3$, $\quad v = -1$

25. $u = x^2 + yz$, $\quad x = pr\cos\theta$, $\quad y = pr\operatorname{sen}\theta$, $\quad z = p + r$;

$\dfrac{\partial u}{\partial p}, \dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ quando $p = 2$, $\quad r = 3$, $\quad \theta = 0$

26. $Y = w\operatorname{tg}^{-1}(uv)$, $\quad u = r + s$, $\quad v = s + t$, $\quad w = t + r$;

$\dfrac{\partial Y}{\partial r}, \dfrac{\partial Y}{\partial s}, \dfrac{\partial Y}{\partial t}$ quando $r = 1$, $\quad s = 0$, $\quad t = 1$

27–30 Utilize a Equação 6 para determinar dy/dx.

27. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

28. $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

29. $\cos(x - y) = xe^y$

30. $\operatorname{sen} x + \cos y = \operatorname{sen} x\cos y$

31–34 Utilize as Equações 7 para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

31. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

32. $xyz = \cos(x + y + z)$

33. $x - z = \operatorname{arctg}(yz)$

34. $yz = \ln(x + z)$

35. A temperatura em um ponto (x, y) é $T(x, y)$, medida em graus Celsius. Um inseto rasteja de modo que sua posição depois de t segundos seja dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, onde x e y são medidas em centímetros. A função temperatura satisfaz $T_x(2, 3) = 4$ e $T_y(2, 3) = 3$. Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de três segundos?

36. A produção W de trigo em um determinado ano depende da temperatura média T e da quantidade anual de chuva R. Cientistas estimam que a temperatura média anual está crescendo à taxa de 0,15 °C/ano e a quantidade anual de chuva está decrescendo à taxa de 0,1 cm/ano. Eles também estimam que, no atual nível de produção, $\partial W/\partial T = -2$ e $\partial W/\partial R = 8$.

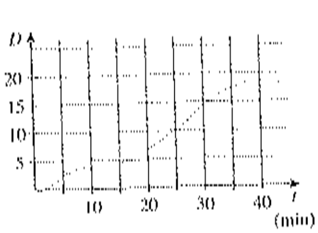
(a) Qual é o significado do sinal dessas derivadas parciais?

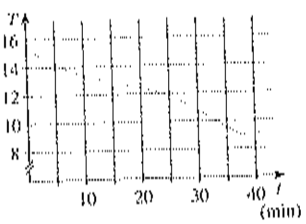
(b) Estime a taxa de variação corrente da produção de trigo dW/dt.

37. A velocidade da propagação do som através do oceano com salinidade de 35 partes por milhar foi modelada pela equação

$$C = 1449{,}2 + 4{,}6T - 0{,}055T^2 + 0{,}00029T^3 + 0{,}016D$$

onde C é a velocidade do som (em metros por segundo), T é a temperatura (em graus Celsius) e D é a profundidade abaixo do nível do mar (em metros). Um mergulhador começa um mergulho tranquilo nas águas oceânicas e a profundidade do mergulho e a temperatura da água ao redor são registradas nos gráficos a seguir. Estime a taxa de variação (em relação ao tempo) da velocidade do som através do oceano experimentada pelo mergulhador 20 minutos depois do início do mergulho. Quais são as unidades?





38. O raio de um cone circular reto aumenta a uma taxa de 4,6 cm/s enquanto sua altura decresce à taxa de 6,5 cm/s. Qual a taxa de variação do volume do cone quando seu raio é de 300 cm e a altura é 350 cm?

39. O comprimento ℓ, a largura w e a altura h de uma caixa variam com o tempo. Em certo instante, as dimensões da caixa são $\ell = 1$ m e $w = h = 2$ m, ℓ e w aumentam a uma taxa de 2 m/s, ao passo que h diminui à taxa de 3 m/s. Nesse instante, determine as taxas nas quais as seguintes quantidades estão variando.

(a) O volume

(b) A área da superfície

(c) O comprimento da diagonal

40. A voltagem V em um circuito elétrico simples decresce lentamente à medida que a pilha se descarrega. A resistência R aumenta lentamente com o aumento de calor do resistor. Use a Lei de Ohm, $V = IR$, para achar como a corrente I está variando no momento em que $R = 400\ \Omega$, $I = 0{,}08$ A, $dV/dt = -0{,}01$ V/s e $dR/dt = 0{,}03\ \Omega$/s.

41. A pressão de um mol de um gás ideal é aumentada à taxa de 0,05 kPa/s e a temperatura é elevada à taxa de 0,15 K/s. Utilize a equação do Exemplo 2 para achar a taxa de variação do volume quando a pressão é 20 kPa e a temperatura é 320 K.

42. Um carro A está viajando para norte na rodovia 16 e um carro B está viajando para oeste na rodovia 83. Os dois carros se aproximam da intersecção dessas rodovias. Em um certo momento, o carro A está a 0,3 km da intersecção viajando a 90 km/h, ao passo que o carro B está a 0,4 km da intersecção viajando a 80 km/h. Qual a taxa de variação da distância entre os carros nesse instante?

43. Um lado de um triângulo está aumentando a uma taxa de 3 cm/s e um segundo lado está decrescendo a uma taxa de 2 cm/s. Se a área do triângulo permanece constante, a que taxa varia o ângulo entre os lados quando o primeiro lado tem 20 cm de comprimento, o segundo lado tem 30 cm de comprimento e o ângulo é $\pi/6$?

44. Se um som com frequência f_s for produzido por uma fonte se movendo ao longo de uma reta com velocidade v_s e um observador estiver se movendo com velocidade v_o ao longo da mesma reta a partir da direção oposta, em direção à fonte, então a frequência do som ouvido pelo observador é

$$f_o = \left(\frac{c + v_o}{c - v_s}\right) f_s$$

onde c é a velocidade do som, cerca de 332 m/s. (Este é o **efeito Doppler**.) Suponha que, em um momento particular, você está em um trem se movendo a 34 m/s e acelerando a 1,2 m/s^2. Um trem se aproxima de você da direção oposta no outro trilho a 40 m/s, acelerando a 1,4 m/s^2, e toca seu apito, que tem frequência de 460 Hz. Neste instante, qual é a frequência aparente que você ouve e quão rapidamente ela está variando?

45-48 Suponha que todas as funções dadas são diferenciáveis.

45. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, (a) determine $\partial z/\partial r$ e $\partial z/\partial\theta$ e (b) mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

46. Se $u = f(x, y)$, onde $x = e^s\cos t$ e $y = e^s\,\text{sen}\,t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

47. Se $z = f(x - y)$, mostre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

48. Se $z = f(x, y)$, onde $x = s + t$ e $y = s - t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$

49-54 Suponha que todas as funções dadas tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

49. Mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é uma solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[*Sugestão*: Tome $u = x + at$, $v = x - at$.]

50. Se $u = f(x, y)$, onde $x = e^s\cos t$ e $y = e^s\,\text{sen}\,t$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$$

51. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$, determine $\partial^2 z/\partial r\, \partial s$. (Compare com o Exemplo 7.)

52. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r \cos \theta$, e $y = r \operatorname{sen} \theta$, determine (a) $\partial z/\partial r$, (b) $\partial z/\partial \theta$ e (c) $\partial^2 z/\partial r\, \partial \theta$.

53. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r \cos \theta$, e $y = r \operatorname{sen} \theta$, mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

54. Suponha $z = f(x, y)$, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$.

(a) Mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

(b) Determine uma fórmula semelhante para $\partial^2 z/\partial s\, \partial t$.

55. Uma função f é dita **homogênea de grau n** se satisfaz a equação $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo valor de t, onde n é um inteiro positivo e f tem as segundas derivadas parciais contínuas.

(a) Verifique que $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ é homogênea de grau 3.

(b) Mostre que, se f é homogênea de grau n, então

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

[*Sugestão:* Utilize a Regra da Cadeia para derivar $f(tx, ty)$ com relação a t.]

56. Se f é homogênea de grau n, mostre que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)f(x, y)$$

57. Se f é homogênea de grau n, mostre que

$$f_x(tx, ty) = t^{n-1}f_x(x, y)$$

58. Suponha que a equação $F(x, y, z) = 0$ defina implicitamente cada uma das três variáveis x, y e z como função das outras duas: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$. Se F for diferenciável e F_x, F_y e F_z forem todas não nulas, mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1$$

14.6 DERIVADAS DIRECIONAIS E O VETOR GRADIENTE

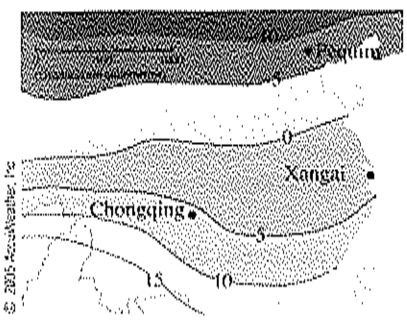


FIGURA 1

A Figura 1 mostra um mapa de contorno da função temperatura $T(x, y)$ para a China às 15 horas em 28 de dezembro de 2004. As curvas de nível, ou isotérmicas, ligam localizações com a mesma temperatura. A derivada parcial T_x em um local como Chongqing é a taxa de variação da temperatura com relação à distância se nos movermos para o leste a partir de Chongqing; T_y é a taxa de variação da temperatura se nos movermos para o norte. Mas, e se quisermos saber a taxa de variação da temperatura quando viajamos para sudoeste ou em alguma outra direção? Nesta seção, introduziremos um tipo de derivada, chamada derivada direcional, que nos permite encontrar a taxa de variação de uma função de duas ou mais variáveis em qualquer direção.

DERIVADAS DIRECIONAIS

Lembremo-nos de que, se $z = f(x, y)$, as derivadas parciais f_x e f_y são definidas como

$$\boxed{1} \qquad f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

e representam as taxas de variação de z na direção positiva dos eixos x e y, ou seja, nas direções e sentidos dos versores **i** e **j**.

Suponha que queiramos determinar a taxa de variação de z no ponto (x_0, y_0) na direção de um vetor unitário arbitrário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ (veja a Figura 2). Para fazê-lo, devemos considerar a superfície S com equação $z = f(x, y)$ (gráfico de f) e tomar $z_0 = f(x_0, y_0)$. O ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ pertence a S. O plano vertical que passa por P na direção de $\mathbf{u}$ intercepta S em uma curva C (veja a Figura 3). A inclinação da reta tangente T a C em P é a taxa de variação de z na direção de $\mathbf{u}$.

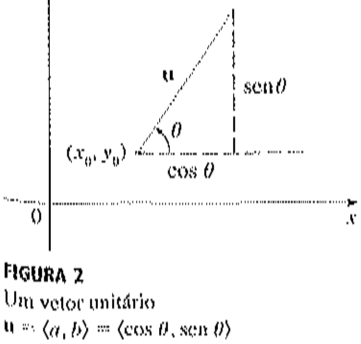


FIGURA 2
Um vetor unitário
$\mathbf{u} = \langle a, b \rangle = \langle \cos \theta, \operatorname{sen} \theta \rangle$

Se considerarmos um mapa topográfico de um morro e se $f(x, y)$ representar a altura acima do nível do mar do ponto de coordenadas (x, y), então a curva de aclive máximo pode ser desenhada como na Figura 12, fazendo-a perpendicular a todas as curvas de contorno. Esse fenômeno pode ser observado na Figura 12 na Seção 14.1, onde o Riacho Lonesome segue a curva de declive máximo.

Os sistemas de computação algébrica têm comandos que traçam alguns vetores gradientes. Cada vetor gradiente $\nabla f(a, b)$ é traçado partindo-se do ponto (a, b). A Figura 13 mostra como fica um desses desenhos (chamados *campos de vetores gradientes*) para a função $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobreposto a um mapa de contornos de f. Como esperado, os vetores gradientes apontam na direção de "subida de morro" e são perpendiculares às curvas de nível.

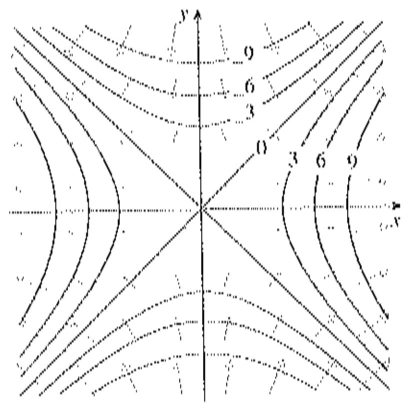
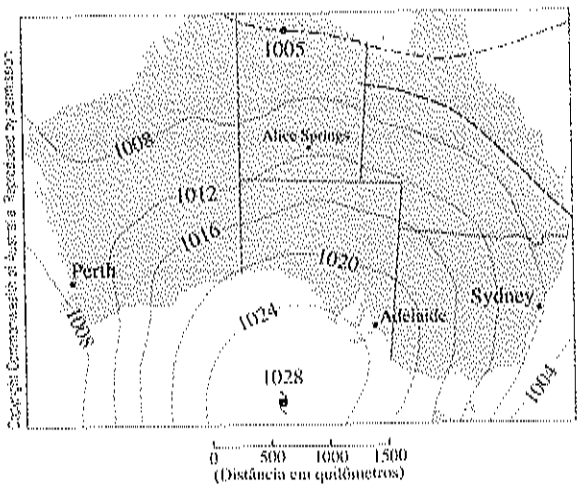


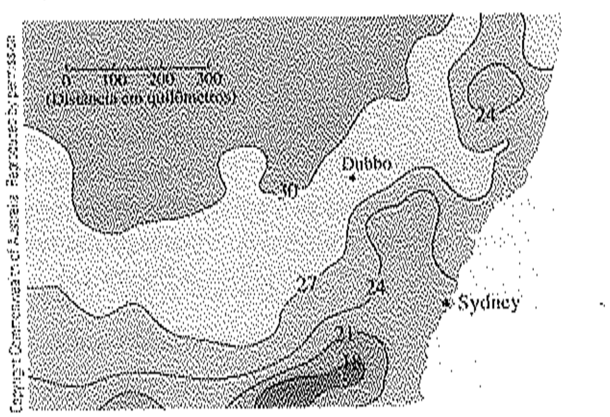
FIGURA 13

14.6 EXERCÍCIOS

1. É dado o mapa de contornos mostrando a pressão barométrica em hectopascais (hPa) na Austrália em 28 de dezembro de 2004. Estime o valor da derivada direcional da função pressão em Alice Springs na direção de Adelaide. Quis são as unidades da derivada direcional?



2. O mapa de contorno mostra a temperatura máxima média em novembro de 2004 (em °C). Estime o valor da derivada direcional da função da temperatura em Dubbo, New South Wales, na direção de Sydney. Quais são as unidades?



3. Uma tabela de valores do índice de sensação térmica $W = f(T, v)$ é dada no Exercício 3 da Seção 14.3. Use-a para estimar o valor de $D_{\mathbf{u}}f(-20, 30)$, onde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$.

4–6 Determine a derivada direcional de f no ponto dado e na direção indicada pelo ângulo θ.

4. $f(x, y) = x^2y^3 - y^4$, $(2, 1)$, $\theta = \pi/4$

5. $f(x, y) = ye^{-x}$, $(0, 4)$, $\theta = 2\pi/3$

6. $f(x, y) = x\,\text{sen}(xy)$, $(2, 0)$, $\theta = \pi/3$

7-10

(a) Determine o gradiente de f.

(b) Calcule o gradiente no ponto P.

(c) Determine a taxa de variação de f em P na direção do vetor $\mathbf{u}$.

7. $f(x, y) = 5xy^2 - 4x^3y$, $P(1, 2)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right\rangle$

8. $f(x, y) = y \ln x$, $P(1, -3)$, $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right\rangle$

9. $f(x, y, z) = xe^{2yz}$, $P(3, 0, 2)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$

10. $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}$, $P(1, 3, 1)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle$

11-17 Determine a derivada direcional da função no ponto dado na direção do vetor $\mathbf{v}$.

11. $f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}$, $(3, 4)$, $\mathbf{v} = \langle 4, -3 \rangle$

12. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(2, 1)$, $\mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$

13. $g(p, q) = p^4 - p^2q^3$, $(2, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

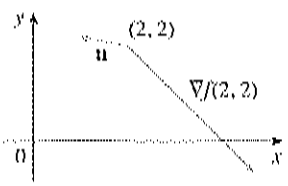
14. $g(r, s) = \text{tg}^{-1}(rs)$, $(1, 2)$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

15. $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, -2 \rangle$

16. $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$, $(3, 2, 6)$, $\mathbf{v} = \langle -1, -2, 2 \rangle$

17. $g(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^{3/2}$, $(1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

18. Use a figura para estimar $D_{\mathbf{u}}f(2, 2)$.



19. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = \sqrt{xy}$ em $P(2, 8)$ na direção de $Q(5, 4)$.

20. Determine a derivada direcional de $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ em $P(1, -1, 3)$ na direção de $Q(2, 4, 5)$.

21-26 Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

21. $f(x, y) = y^2/x$, $(2, 4)$

22. $f(p, q) = qe^{-p} + pe^{-q}$, $(0, 0)$

23. $f(x, y) = \text{sen}(xy)$, $(1, 0)$

24. $f(x, y, z) = (x + y)/z$, $(1, 1, -1)$

25. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(3, 6, -2)$

26. $f(x, y, z) = \text{tg}(x + 2y + 3z)$, $(-5, 1, 1)$

27. (a) Mostre que uma função diferenciável f decresce mais rapidamente em $\mathbf{x}$ na direção oposta à do vetor gradiente, ou seja, na direção de $-\nabla f(\mathbf{x})$.

(b) Utilize a parte (a) para determinar a direção onde $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$ decresce mais rápido no ponto $(2, -3)$.

28. Determine as direções em que a derivada direcional de $f(x, y) = ye^{-xy}$ no ponto $(0, 2)$ tem valor 1.

29. Determine todos os pontos nos quais a direção de maior variação da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

30. Nas proximidades de uma boia, a profundidade de um lago em um ponto com coordenadas (x, y) é $z = 200 + 0{,}02x^2 - 0{,}001y^3$, onde x, y e z são medidos em metros. Um pescador que está em um pequeno barco parte do ponto $(80, 60)$ em direção à boia, que está localizada no ponto $(0, 0)$. A água sob o barco está ficando mais profunda ou mais rasa quando ele começa a se mover? Explique.

31. A temperatura T em uma bola de metal é inversamente proporcional à distância do centro da bola, que tomamos como a origem. A temperatura no ponto $(1, 2, 2)$ é de $120°$.

(a) Determine a taxa de variação de T em $(1, 2, 2)$ em direção ao ponto $(2, 1, 3)$.

(b) Mostre que em qualquer ponto da bola a direção de maior crescimento na temperatura é dada por um vetor que aponta para a origem.

32. A temperatura em um ponto (x, y, z) é dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$

onde T é medido em °C e x, y, z em metros.

(a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $P(2, -1, 2)$ em direção ao ponto $(3, -3, 3)$.

(b) Qual é a direção de maior crescimento da temperatura em P?

(c) Encontre a taxa máxima de crescimento em P.

33. Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

(a) Determine a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

(b) Em que direção V varia mais rapidamente em P?

(c) Qual a taxa máxima de variação em P?

34. Suponha que você esteja subindo uma montanha cuja forma é dada pela equação $z = 1000 - 0{,}005x^2 - 0{,}01y^2$, onde x, y e z são medidos em metros e você está em um ponto com coordenadas $(60, 40, 966)$. O eixo x positivo aponta para leste e o eixo y positivo aponta para o norte.

(a) Se você andar exatamente para o Sul, começará a subir ou a descer? Com que taxa?

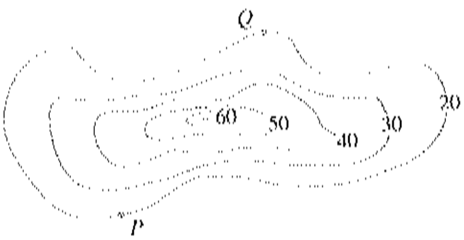
(b) Se você caminhar em direção ao Noroeste, começará a subir ou a descer? A que taxa?

(c) Em que direção a inclinação é maior? Qual é a taxa de elevação nessa direção? Qual é o ângulo que o início desse caminho faz em relação à horizontal?

35. Seja f uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ e $D(6, 15)$. A derivada direcional em A na direção do vetor

$\overrightarrow{AB}$ é 3, e a derivada direcional em A na direção $\overrightarrow{AC}$ é 26. Determine a derivada direcional de f em A na direção do vetor $\overrightarrow{AD}$.

36. Para o mapa de contorno dado, desenhe as curvas de maior crescimento em P e em Q.

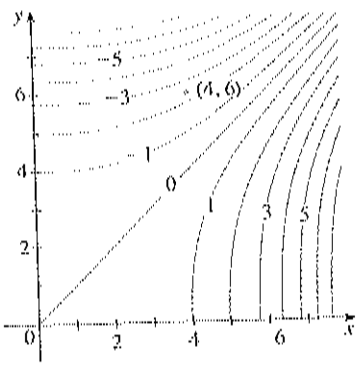


37. Mostre que a operação de calcular o gradiente de uma função tem a propriedade fornecida. Suponha que u e v sejam funções de x e y, diferenciáveis, e a e b sejam constantes.

(a) $\nabla(au + bv) = a\,\nabla u + b\,\nabla v$ (b) $\nabla(uv) = u\,\nabla v + v\,\nabla u$

(c) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\nabla u - u\,\nabla v}{v^2}$ (d) $\nabla u^n = nu^{n-1}\,\nabla u$

38. Esboce o vetor gradiente $\nabla f(4, 6)$ para a função f cujas curvas de nível são mostradas. Explique como você escolheu a direção e sentido e o comprimento desse vetor.



39-44 Determine equações (a) do plano tangente e (b) da reta normal a uma superfície dada no ponto especificado.

39. $2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 10$, $(3, 3, 5)$

40. $y = x^2 - z^2$, $(4, 7, 3)$

41. $x^2 - 2y^2 + z^2 + yz = 2$, $(2, 1, -1)$

42. $x - z = 4\,\text{arctg}(yz)$, $(1 + \pi, 1, 1)$

43. $z + 1 = xe^y \cos z$, $(1, 0, 0)$

44. $yz = \ln(x + z)$, $(0, 0, 1)$

45-46 Utilize um computador para traçar o gráfico da superfície, do plano tangente e da reta normal na mesma tela. Escolha o domínio com cuidado para evitar planos verticais estranhos. Escolha o ponto de vista de modo que você possa ver bem os três objetos.

45. $xy + yz + zx = 3$, $(1, 1, 1)$

46. $xyz = 6$, $(1, 2, 3)$

47. Se $f(x, y) = xy$, encontre o vetor gradiente $\nabla f(3, 2)$ e use-o para encontrar a reta tangente à curva de nível $f(x, y) = 6$ no ponto $(3, 2)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

48. Se $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$, encontre o vetor gradiente $\nabla g(1, 2)$ e use-o para encontrar a reta tangente à curva de nível $g(x, y) = 1$ no ponto $(1, 2)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

49. Mostre que a equação do plano tangente ao elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ no ponto (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

50. Determine a equação do plano tangente ao hiperboloide $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ em (x_0, y_0, z_0) e expresse-a de forma semelhante à do Exercício 49.

51. Mostre que a equação do plano tangente ao paraboloide elíptico $z/c = x^2/a^2 + y^2/b^2$ no ponto (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como

$$\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} = \frac{z + z_0}{c}$$

52. Em qual ponto do paraboloide $y = x^2 + z^2$ o plano tangente é paralelo ao plano $x + 2y + 3z = 1$?

53. Existem pontos no hiperboloide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $z = x + y$?

54. Mostre que o elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1, 1, 2)$. (Isso significa que eles têm um plano tangente comum nesse ponto.)

55. Mostre que todo plano que é tangente ao cone $x^2 + y^2 = z^2$ passa pela origem.

56. Mostre que toda reta normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ passa pelo centro da esfera.

57. Mostre que a soma das intersecções com os eixos x, y e z de qualquer plano tangente à superfície $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$ é uma constante.

58. Mostre que as pirâmides cortadas do primeiro octante por qualquer plano tangente à superfície $xyz = 1$ em pontos do primeiro octante têm todas o mesmo volume.

59. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva formada pela intersecção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ com o elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1, 1, 2)$.

60. (a) O plano $y + z = 3$ intercepta o cilindro $x^2 + y^2 = 5$ em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente a essa elipse no ponto $(1, 2, 1)$.

(b) Desenhe o cilindro, o plano e a reta tangente na mesma tela.

61. (a) Duas superfícies são ditas **ortogonais** em um ponto de intersecção se suas normais são perpendiculares nesse ponto. Mostre que superfícies com equação $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ são ortogonais em um ponto P onde $\nabla F \neq \mathbf{0}$ e $\nabla G \neq \mathbf{0}$ se e somente se, em P,

$$F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0.$$

(b) Use a parte (a) para mostrar que as superfícies $z^2 = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ são ortogonais em todo ponto de intersecção. Você pode ver isso sem fazer os cálculos?

62. (a) Mostre que a função $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ é contínua e suas derivadas parciais f_x e f_y existem na origem, mas as derivadas direcionais em todas as outras direções não existem.

(b) Trace o gráfico de f perto da origem e comente como ele confirma a parte (a).

63. Suponha que as derivadas direcionais de $f(x, y)$ sejam conhecidas em um determinado ponto em duas direções não paralelas dadas por vetores unitários $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. É possível determinar ∇f nesse ponto? Em caso afirmativo, como fazê-lo?

64. Mostre que, se $z = f(x, y)$ for diferenciável em $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, então

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$

[*Sugestão*: Use a Definição 14.4.7 diretamente.]

14.7 VALORES MÁXIMO E MÍNIMO

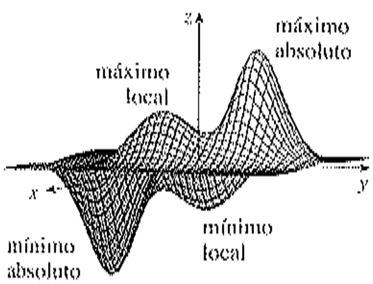


FIGURA 1

Como vimos no Capítulo 4, no Volume I, um dos principais usos da derivada ordinária é na determinação dos valores máximo e mínimo. Nesta seção veremos como usar as derivadas parciais para localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis. Em particular, no Exemplo 6 veremos como maximizar o volume de uma caixa sem tampa se tivermos uma quantidade limitada de cartolina para trabalhar.

Olhe os picos e vales no gráfico de f mostrado na Figura 1. Existem dois pontos (a, b) nos quais f tem um *máximo local*, ou seja, onde $f(a, b)$ é maior que os valores próximos de $f(x, y)$. O maior destes dois valores é o *máximo absoluto*. Do mesmo modo, f tem dois *mínimos locais* onde $f(a, b)$ é menor que os valores próximos. O menor destes dois valores é o *mínimo absoluto*.

1 DEFINIÇÃO Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em (a, b) se $f(x, y) \leq f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b). [Isso significa que $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo ponto (x, y) em alguma bola aberta com centro em (a, b).] O número $f(a, b)$ é chamado **valor máximo local**. Se $f(x, y) \geq f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b), então f tem um **mínimo local** em (a, b) e $f(a, b)$ é um **valor mínimo local**.

Se as inequações da Definição 1 valerem para todos os pontos (x, y) do domínio de f, então f tem um **máximo absoluto** (ou **mínimo absoluto**) em (a, b).

2 TEOREMA Se uma função f tem um máximo ou mínimo local em (a, b) e as derivadas parciais de primeira ordem de f existem nesses pontos, então $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$.

■ Observe que a conclusão do Teorema 2 pode ser colocada em termos dos vetores gradientes como $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $g(x) = f(x, b)$. Se f tem um máximo (ou mínimo) local em (a, b), então g tem um máximo (ou mínimo) local em a, de modo que $g'(a) = 0$ pelo Teorema de Fermat (veja o Teorema 4.1.4, no Volume I). Mas $g'(a) = f_x(a, b)$ (veja a Equação 14.3.1), e assim $f_x(a, b) = 0$. Da mesma forma, pela aplicação do Teorema de Fermat à função $G(y) = f(a, y)$, obtemos $f_y(a, b) = 0$.

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}^2 f = D_{\mathbf{u}}(D_{\mathbf{u}} f) &= \frac{\partial}{\partial x}(D_{\mathbf{u}} f)h + \frac{\partial}{\partial y}(D_{\mathbf{u}} f)k \\ &= (f_{xx}h + f_{yx}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k \\ &= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 \qquad \text{(pelo Teorema de Clairaut)} \end{aligned}$$

Se completarmos os quadrados na expressão, obteremos

$$\boxed{10} \qquad D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx}\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}}(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)$$

Temos que $f_{xx}(a, b) > 0$ e $D(a, b) > 0$. Mas f_{xx} e $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ são funções contínuas, logo, existe uma bola aberta B com centro (a, b) e raio $\delta > 0$ tal que $f_{xx}(x, y) > 0$ e $D(x, y) > 0$ sempre que (x, y) pertencer a B. Portanto, olhando a Equação 10, vemos que $D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) > 0$ sempre que (x, y) pertencer a B. Isso implica que, se C é uma curva obtida pela intersecção do gráfico de f com o plano vertical que passa por $P(a, b, f(a, b))$ na direção de $\mathbf{u}$, então C tem concavidade para cima no intervalo de comprimento 2δ. Isso é verdadeiro na direção de todo vetor $\mathbf{u}$; portanto, se restringirmos (x, y) a B, o gráfico de f permanecerá acima do plano horizontal tangente a f em P. Logo, $f(x, y) \geq f(a, b)$ sempre que (x, y) estiver em B. Isso mostra que $f(a, b)$ é um mínimo local.

14.7 EXERCÍCIOS

1. Suponha que $(1, 1)$ seja um ponto crítico de uma função f com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre f?

(a) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 1, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

(b) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 3, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

2. Suponha que $(0, 2)$ seja um ponto crítico de uma função g com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre g?

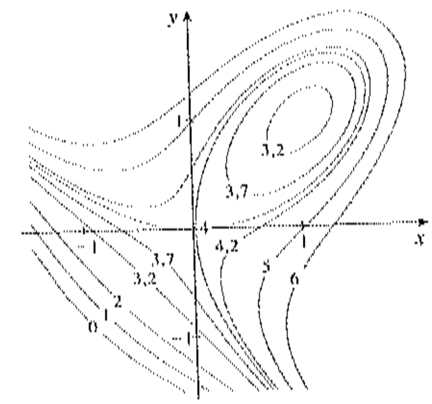
(a) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 1$

(b) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 2, \quad g_{yy}(0, 2) = -8$

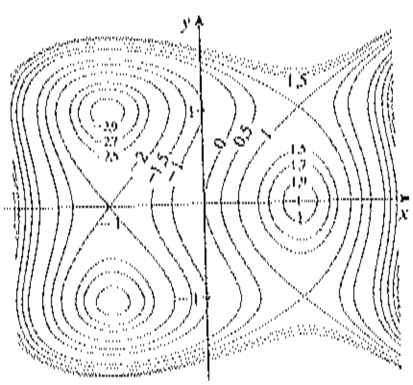
(c) $g_{xx}(0, 2) = 4, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 9$

3-4 Utilize as curvas de nível da figura para predizer a localização dos pontos críticos de f e se f tem um ponto de sela ou um máximo ou mínimo local em cada um desses pontos. Explique seu raciocínio. Em seguida, empregue o Teste da Segunda Derivada para confirmar suas predições.

3. $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



4. $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



5-18 Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Se você tiver um programa para traçar gráficos tridimensionais no computador, trace a função com um domínio e um ponto de vista que mostrem os seus aspectos importantes.

5. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

6. $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

7. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$

8. $f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2}$

9. $f(x, y) = xy - 2x - y$

10. $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

11. $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

12. $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

13. $f(x, y) = e^x \cos y$

14. $f(x, y) = y \cos x$

15. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}$

16. $f(x, y) = e^y(y^2 - x^2)$

17. $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 7$

18. $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi$

19. Mostre que $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ tem um número infinito de pontos críticos e que $D = 0$ em cada um. A seguir, mostre que f tem um mínimo local (e absoluto) em cada ponto crítico.

20. Mostre que $f(x, y) = x^2ye^{-x^2-y^2}$ tem valores máximos em $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$ e valores mínimos em $(\pm 1, -1/\sqrt{2})$. Mostre também que f tem infinitos outros pontos críticos e que $D = 0$ em cada um deles. Quais deles dão origem a valores máximos? E a valores mínimos? E a pontos de sela?

21-24 Utilize um gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Em seguida, use o cálculo para achar esses valores precisamente.

21. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2}$

22. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant 2\pi, 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$

24. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant \pi/4, 0 \leqslant y \leqslant \pi/4$

25-28 Utilize uma ferramenta gráfica como no Exemplo 4 (ou o Método de Newton ou um determinador de raízes) para encontrar os pontos críticos de f com precisão de três casas decimais. Em seguida, classifique o ponto crítico e determine o valor mais alto e o mais baixo do gráfico.

25. $f(x, y) = x^4 - 5x^2 + y^2 + 3x + 2$

26. $f(x, y) = 5 - 10xy - 4x^2 + 3y - y^4$

27. $f(x, y) = 2x + 4x^2 - y^2 + 2xy^2 - x^4 - y^4$

28. $f(x, y) = e^x + y^4 - x^3 + 4 \cos y$

29-36 Determine os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto D.

29. $f(x, y) = 1 + 4x - 5y$, D é a região triangular fechada com vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, e $(0, 3)$

30. $f(x, y) = 3 + xy - x - 2y$, D é a região triangular fechada com vértices $(1, 0)$, $(5, 0)$, e $(1, 4)$

31. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$,
$D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$

32. $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant 5\}$

33. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

34. $f(x, y) = xy^2$, $\quad D = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 3\}$

35. $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $\quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

36. $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, D é o quadrilátero cujos vértices são $(-2, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 2)$, e $(-2, -2)$.

37. Para as funções de uma variável, é impossível uma função contínua ter dois pontos de máximo local e nenhum de mínimo local. Para as funções de duas variáveis, esse caso existe. Mostre que a função

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

só tem dois pontos críticos, ambos de máximo local. Em seguida, utilize um computador para desenhar o gráfico com uma escolha cuidadosa de domínio e de ponto de vista para ver como isso é possível.

38. Se uma função de uma variável é contínua em um intervalo e tem um único ponto crítico, então um máximo local tem de ser um máximo absoluto. Mas isso não é verdadeiro para as funções de duas variáveis. Mostre que a função

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

tem exatamente um ponto crítico, onde f tem um máximo local, porém este não é um máximo absoluto. Em seguida, utilize um computador com uma escolha conveniente de domínio e ponto de vista para ver como isso é possível.

39. Determine a menor distância entre o ponto $(2, 1, -1)$ e o plano $x + y - z = 1$.

40. Determine o ponto do plano $x - y + z = 4$ que está mais próximo do ponto $(1, 2, 3)$.

41. Determine os pontos do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que estão mais próximos do ponto $(4, 2, 0)$.

42. Determine os pontos da superfície $y^2 = 9 + xz$ que estão mais próximos da origem.

43. Determine três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

44. Encontre três números positivos cuja soma é 12 e cuja soma dos quadrados é a menor possível.

45. Encontre o volume máximo de uma caixa retangular que está inscrita em uma esfera de raio r.

46. Encontre as dimensões de uma caixa com volume de 1 000 cm^3 que tenha a área de sua superfície mínima.

47. Determine o volume da maior caixa retangular no primeiro octante com três faces nos planos coordenados e com um vértice no plano $x + 2y + 3z = 6$.

48. Determine as dimensões da caixa retangular de maior volume se a área total de sua superfície é dada por 64 cm^2.

49. Determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas 12 arestas seja uma constante c.

50. A base de um aquário com volume V é feita de ardósia e os lados são de vidro. Se o preço da ardósia (por unidade de área) equivale a cinco vezes o preço do vidro, determine as dimensões do aquário para minimizar o custo do material.

51. Uma caixa de papelão sem tampa deve ter um volume de 32 000 cm^3. Determine as dimensões que minimizem a quantidade de papelão utilizado.

52. Um prédio retangular está sendo projetado para minimizar a perda de calor. As paredes leste e oeste perdem calor a uma taxa de 10 unidades/m^2 por dia, as paredes norte e sul, a uma taxa de 8 unidades/m^2 por dia, o piso, a uma taxa de 1 unidade/m^2 por dia e o teto, a uma taxa de 5 unidades/m^2 por dia. Cada parede deve ter pelo menos 30 m de comprimento, a altura deve ser no mínimo 4 m, e o volume, exatamente 4 000 m^3.

(a) Determine e esboce o domínio da perda de calor como uma função dos comprimentos dos lados.

(b) Encontre as dimensões que minimizam a perda de calor. (Analise tanto os pontos críticos como os pontos sobre a fronteira do domínio.)

(c) Você poderia projetar um prédio com precisamente menos perda de calor ainda se as restrições sobre os comprimentos das paredes fossem removidas?

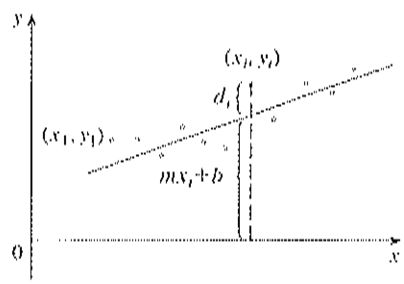
53. Se o comprimento da diagonal de uma caixa retangular deve ser L, qual é o maior volume possível?

54. Três alelos (versões alternativas de um gene) A, B e O determinam os quatro tipos de sangue: A (AA ou AO), B (BB ou BO), O (OO) e AB. A Lei de Hardy-Weinberg afirma que a proporção de indivíduos em uma população que carregam dois alelos diferentes é

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

onde p, q e r são as proporções de A, B e O na população. Use o fato de que $p + q + r = 1$ para mostrar que P é no máximo $\frac{2}{3}$.

55. Suponha que um cientista tenha razões para acreditar que duas quantidades x e y estejam relacionadas linearmente, ou seja, $y = mx + b$, pelo menos aproximadamente, para algum valor de m e de b. O cientista realiza uma experiência e coleta os dados na forma de pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . . , (x_n, y_n), e então coloca-os em um gráfico. Os pontos não estão todos alinhados, de modo que o cientista quer determinar as constantes m e b para que a reta $y = mx + b$ "ajuste" os pontos tanto quanto possível (veja a figura).



Seja $d_i = y_i - (mx_i + b)$ o desvio vertical do ponto (x_i, y_i) da reta. O **método dos mínimos quadrados** determina m e b de modo a minimizar $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$, a soma dos quadrados dos desvios. Mostre que, de acordo com esse método, a reta de melhor ajuste é obtida quando

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Assim, a reta é determinada resolvendo esse sistema linear de duas equações nas incógnitas m e b. (Veja a Seção 1.2 do Volume I para mais aplicações do método dos mínimos quadrados.)

56. Determine uma equação do plano que passa pelo ponto (1, 2, 3) e que corta o menor volume do primeiro octante.

PROJETO APLICADO

PROJETO DE UMA CAÇAMBA

Para esse projeto, inicialmente localizamos uma caçamba de entulho para estudar sua forma e construção. Tentaremos então determinar as dimensões de um recipiente de forma similar e que minimize o custo de construção.

1. Primeiro localize uma caçamba de entulho. Estude e descreva cuidadosamente todos os detalhes de sua construção e determine seu volume. Inclua um esboço do recipiente.

2. Mantendo a mesma forma geral e o método de construção, determine as dimensões que tal recipiente deveria ter para minimizar o custo de construção. Utilize as seguintes hipóteses para sua análise:
   - Os lados, a parte de trás e a da frente devem ser feitos com folhas de aço de tipo 12 (2,657 mm de espessura), que custam \$ 8,00 por metro quadrado (incluindo quaisquer cortes ou dobras necessários).
   - A base deve ser feita de uma folha de aço de tipo 10 (3,416 mm de espessura), que custa \$ 10,00 por metro quadrado.
   - As tampas custam aproximadamente \$ 50,00 cada, independentemente das dimensões.
   - A soldagem custa aproximadamente \$ 0,60 por metro para material e serviço combinados.

   Dê sua justificativa para qualquer hipótese adicional ou simplificação feita dos detalhes de construção.

3. Descreva como qualquer hipótese ou simplificação feita pode afetar o resultado.

4. Se você fosse contratado como consultor nessa pesquisa, quais seriam suas conclusões? Você recomendaria a alteração do projeto da caçamba? Se sim, descreva a economia resultante.

PROJETO DE DESCOBERTA

APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA E PONTOS CRÍTICOS

A aproximação por polinômio de Taylor de uma função de uma variável discutida no Capítulo 11 pode ser estendida para as funções de duas ou mais variáveis. Estudaremos aqui a aproximação quadrática para as funções de duas variáveis e usaremos esse estudo para melhor entender o Teste da Segunda Derivada para classificar pontos críticos.

Na Seção 14.4 discutimos a linearização de uma função f de duas variáveis em um ponto (a, b):

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Lembre-se de que o gráfico de L é o plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ em $(a, b, f(a, b))$, e a aproximação linear correspondente é $f(x, y) \approx L(x, y)$. A linearização L é também chamada **polinômio de Taylor de primeiro grau** de f em (a, b).

1. Se f tiver derivadas parciais de segunda ordem contínuas em (a, b), então o **polinômio de Taylor de segundo grau** de f em (a, b) é

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ &\quad + \tfrac{1}{2} f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \tfrac{1}{2} f_{yy}(a, b)(y - b)^2 \end{aligned}$$

   e a aproximação $f(x, y) \approx Q(x, y)$ é denominada **aproximação quadrática** de f em (a, b). Verifique que Q tem as mesmas derivadas parciais de primeira e segunda ordens que f em (a, b).

2. (a) Determine os polinômios de Taylor de primeiro e segundo graus L e Q para $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ em $(0, 0)$.
   (b) Trace o gráfico de f, L e Q. Comente quão boas são essas aproximações.

3. (a) Encontre os polinômios de Taylor de primeiro e segundo graus L e Q para $f(x, y) = xe^y$ em $(1, 0)$.
   (b) Compare os valores de L, Q e f em $(0{,}9, 0{,}1)$.
   (c) Trace o gráfico de f, L e Q. Comente quão boas são essas aproximações.

4. Nesse problema analisaremos o comportamento do polinômio $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ (sem utilizar o Teste da Segunda Derivada) identificando o gráfico como um paraboloide.
   (a) Completando os quadrados, mostre que, se $a \neq 0$, então
   $$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)y^2\right]$$
   (b) Seja $D = 4ac - b^2$. Demonstre que se $D > 0$ e $a > 0$, então f tem um mínimo local em $(0, 0)$.
   (c) Demonstre que, se $D > 0$ e $a < 0$, então f tem um máximo local em $(0, 0)$.
   (d) Demonstre que, se $D < 0$, então $(0, 0)$ é um ponto de sela.

5. (a) Suponha que f seja uma função qualquer com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, tal que $f(0, 0) = 0$ e que $(0, 0)$ seja um ponto crítico de f. Escreva uma expressão para o polinômio de Taylor de segundo grau Q de f em $(0, 0)$.
   (b) O que você conclui sobre Q usando os resultados do Problema 4?
   (c) Em vista da aproximação quadrática $f(x, y) \approx Q(x, y)$, o que a parte (b) sugere sobre f?

14.8 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

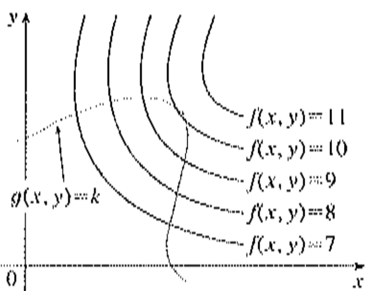


FIGURA 1

No Exemplo 6 da Seção 14.7 maximizamos a função volume $V = xyz$ sujeita à restrição $2xz + 2yz + xy = 12$, que expressa a condição de a área da superfície ser de 12 m^2. Nesta seção apresentaremos o método de Lagrange para maximizar uma função genérica $f(x, y, z)$ sujeita a uma restrição (ou vínculo) da forma $g(x, y, z) = k$.

É fácil explicar a base geométrica do método de Lagrange para as funções de duas variáveis. Então, vamos começar tentando determinar os valores extremos de $f(x, y)$ sujeita a uma restrição da forma $g(x, y) = k$. Em outras palavras, queremos achar os valores extremos de $f(x, y)$ quando o ponto (x, y) pertencer à curva de nível $g(x, y) = k$. A Figura 1 mostra essa curva juntamente com várias outras curvas de nível da função f. Essas curvas de nível têm equação $f(x, y) = c$, onde $c = 7, 8, 9, 10, 11$. Maximizar $f(x, y)$ sujeita a $g(x, y) = k$ é achar qual o maior valor de c tal que a curva de nível $f(x, y) = c$ intercepte $g(x, y) = k$. Parece, da Figura 1, que isso acontece quando essas curvas se tocam, ou seja, quando essas curvas têm uma reta tangente comum. (Caso contrário, poderíamos aumentar o valor de c.) Isso significa que as retas normais ao ponto (x_0, y_0) onde as duas curvas se tocam devem ser as mesmas. Logo, os vetores gradientes são paralelos, ou seja, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algum escalar λ.

Esse tipo de argumento também se aplica ao problema de achar os valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = k$. Assim, o ponto (x, y, z) está restrito a pertencer à superfície S com equação $g(x, y, z) = k$. Em vez das curvas de nível da Figura 1, devemos considerar as superfícies de nível $f(x, y, z) = c$ e argumentar que, se o valor máximo de f é

O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ intercepta o plano $x - y + z = 1$ em uma elipse (Figura 6). O Exemplo 5 pergunta o valor máximo de f quando (x, y, z) pertence a essa elipse.

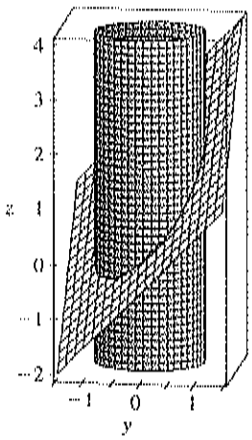


FIGURA 6

SOLUÇÃO Maximizamos a função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições $g(x, y, z) = x - y + z = 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. A condição de Lagrange é $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, de modo que devemos resolver as equações

$$1 = \lambda + 2x\mu \tag{17}$$

$$2 = -\lambda + 2y\mu \tag{18}$$

$$3 = \lambda \tag{19}$$

$$x - y + z = 1 \tag{20}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{21}$$

Substituindo $\lambda = 3$ [de (19)] em (17), obtemos $2x\mu = -2$, e então $x = -1/\mu$. Analogamente, (18) dá $y = 5/(2\mu)$. Substituindo em (21), temos

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

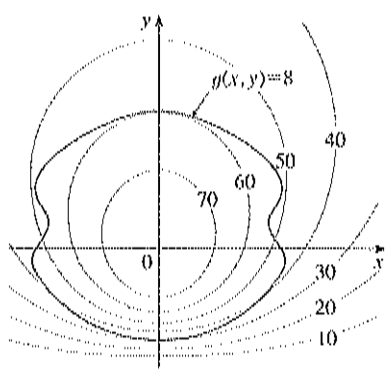
e assim $\mu^2 = \frac{29}{4}$, $\mu = \pm\sqrt{29}/2$. Então $x = \mp 2/\sqrt{29}$, $y = \pm 5/\sqrt{29}$ e, de (20), $z = 1 - x + y = 1 \pm 7/\sqrt{29}$. Os valores correspondentes de f são

$$\mp \frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm \frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

Portanto, o valor máximo de f na curva dada é $3 + \sqrt{29}$.

14.8 EXERCÍCIOS

1. Na figura estão um mapa de contorno de f e a curva de equação $g(x, y) = 8$. Estime os valores máximo e mínimo de f sujeita à restrição $g(x, y) = 8$. Explique suas razões.



2. (a) Use uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Na mesma tela, trace diversas curvas da forma $x^2 + y = c$ até que você encontre duas que apenas toquem o círculo. Qual o significado dos valores de c dessas duas curvas?

   (b) Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$. Compare sua resposta com a da parte (a).

3–17 Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

3. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $\quad xy = 1$
4. $f(x, y) = 4x + 6y$; $\quad x^2 + y^2 = 13$
5. $f(x, y) = x^2y$; $\quad x^2 + 2y^2 = 6$
6. $f(x, y) = e^{xy}$; $\quad x^3 + y^3 = 16$
7. $f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z$; $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 35$
8. $f(x, y, z) = 8x - 4z$; $\quad x^2 + 10y^2 + z^2 = 5$
9. $f(x, y, z) = xyz$; $\quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
10. $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$; $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$
11. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $\quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$
12. $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$; $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$
13. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$; $\quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$
14. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$; $\quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$
15. $f(x, y, z) = x + 2y$; $\quad x + y + z = 1$, $\quad y^2 + z^2 = 4$
16. $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$; $\quad x + y - z = 0$, $\quad x^2 + 2z^2 = 1$
17. $f(x, y, z) = yz + xy$; $\quad xy = 1$, $\quad y^2 + z^2 = 1$

18-19 Determine os valores extremos de f na região descrita pela desigualdade.

18. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$, $\quad x^2 + y^2 \leq 16$

19. $f(x, y) = e^{-xy}$, $\quad x^2 + 4y^2 \leq 1$

20. Considere o problema de maximizar a função $f(x, y) = 2x + 3y$ sujeita à restrição $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$.
(a) Tente utilizar multiplicadores de Lagrange para resolver o problema.
(b) $f(25, 0)$ dá um valor maior que o obtido na parte (a)?
(c) Resolva o problema traçando a equação da restrição e diversas curvas de nível de f.
(d) Explique por que o método dos multiplicadores de Lagrange falha em resolver o problema.
(e) Qual é o significado de $f(9, 4)$?

21. Considere o problema de minimizar a função $f(x, y) = x$ na curva $y^2 + x^4 - x^3 = 0$ (uma piriforme).
(a) Tente usar multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.
(b) Mostre que o valor mínimo é $f(0, 0) = 0$, mas que a condição $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$ não é satisfeita para nenhum valor de λ.
(c) Explique por que os multiplicadores de Lagrange falham em encontrar o mínimo neste caso.

22. (a) Se seu sistema de computação algébrica traça o gráfico de curvas definidas implicitamente, use-o para estimar os valores mínimo e máximo de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ sujeita a $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ por métodos gráficos.
(b) Resolva o problema da parte (a) com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange. Use um SCA para resolver as equações numericamente. Compare sua resposta com a da parte (a).

23. A produção total P de certo produto depende da quantidade L de trabalho empregado e da quantidade K de capital investido. Nas Seções 14.1 e 14.3 discutimos como o modelo Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ seguida de certas hipóteses econômicas, onde b e α são constantes positivas e $\alpha < 1$. Se o custo por unidade de trabalho for m e o custo por unidade de capital for n, e uma companhia puder gastar somente uma quantidade p de dinheiro como despesa total, então a maximização da produção P estará sujeita à restrição $mL + nK = p$. Mostre que a produção máxima ocorre quando

$$L = \frac{\alpha p}{m} \qquad \text{e} \qquad K = \frac{(1 - \alpha)p}{n}$$

24. Em relação ao Problema 23, suponha agora que a produção seja fixada em $bL^{\alpha}K^{1-\alpha} = Q$, onde Q é uma constante. Quais valores de L e K minimizam a função custo $C(L, K) = mL + nK$?

25. Utilize os multiplicadores de Lagrange para demonstrar que o retângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante p, é um quadrado.

26. Use multiplicadores de Lagrange para demonstrar que o triângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante p, é equilátero. [*Sugestão*: Utilize a fórmula de Heron para a área:

$$A = \sqrt{s(s - x)(s - y)(s - z)}$$

onde $s = p/2$ e x, y, z são os comprimentos dos lados.]

27-39 Utilize os multiplicadores de Lagrange para dar uma solução alternativa aos exercícios da Seção 14.7 indicados.

27. Exercício 39
28. Exercício 40
29. Exercício 41
30. Exercício 42
31. Exercício 43
32. Exercício 44
33. Exercício 45
34. Exercício 46
35. Exercício 47
36. Exercício 48
37. Exercício 49
38. Exercício 50
39. Exercício 53

40. Determine os volumes máximo e mínimo da caixa retangular cuja superfície tem 1 500 cm^2 e cuja soma dos comprimentos das arestas é 200 cm.

41. O plano $x + y + 2z = 2$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$ em uma elipse. Determine os pontos dessa elipse que estão mais próximo e mais longe da origem.

42. O plano $4x - 3y + 8z = 5$ intercepta o cone $z^2 = x^2 + y^2$ em uma elipse.
(a) Faça os gráficos do cone, do plano e da elipse.
(b) Use os multiplicadores de Lagrange para achar os pontos mais alto e mais baixo da elipse.

43-44 Ache os valores de máximo e mínimo da função f sujeita às restrições dadas. Utilize um sistema de computação algébrica para resolver o sistema de equações proveniente do uso dos multiplicadores de Lagrange. (Se seu SCA achar somente uma solução, você pode precisar do uso de comandos adicionais.)

43. $f(x, y, z) = ye^{x-z}$; $\quad 9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$, $\quad xy + yz = 1$

44. $f(x, y, z) = x + y + z$; $\quad x^2 - y^2 = z$, $\quad x^2 + z^2 = 4$

45. (a) Determine o valor máximo de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

dado que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos e $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, onde c é uma constante.
(b) Deduza da parte (a) que, se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos, então

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Essa desigualdade diz que a média geométrica de n números não pode ser maior que a média aritmética deles. Sob que circunstâncias as duas médias são iguais?

46. (a) Maximize $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ sujeita às restrições $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ e $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.

(b) Tome

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum a_j^2}} \qquad \text{e} \qquad y_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum b_j^2}}$$

e mostre que

$$\sum a_i b_i \leq \sqrt{\sum a_j^2}\sqrt{\sum b_j^2}$$

para quaisquer números $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Essa desigualdade é conhecida como a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

PROJETO APLICADO

CIÊNCIA DOS FOGUETES

Muitos foguetes, tais como o *Pegasus XL*, usado atualmente para o lançamento de satélites, e o *Saturno V*, que colocou o primeiro homem na Lua, são projetados para usar três estágios em sua subida para o espaço. O primeiro e maior estágio impulsiona o foguete até que seu combustível seja consumido, quando esse estágio é ejetado para diminuir a massa do foguete. O segundo e terceiro estágios, que são menores, funcionam da mesma forma, colocando a carga do foguete em órbita em torno da Terra. (Com esse projeto são necessários pelo menos dois estágios para que o foguete atinja a velocidade necessária, e o uso de três estágios provou oferecer boa relação entre custo e desempenho.) Nosso objetivo aqui é determinar as massas individuais dos três estágios, que foram projetados de forma a minimizar a massa total do foguete e ao mesmo tempo permitir que ele atinja a velocidade desejada.

Para um foguete com um único estágio consumindo combustível a uma taxa constante, a variação na velocidade resultante da aceleração do foguete foi modelada por

$$\Delta V = -c \ln\left(1 - \frac{(1-S)M_r}{P + M_r}\right)$$

onde M_r é a massa do propulsor do foguete, incluindo o combustível inicial, P é a massa da carga, S é o *fator estrutural* determinado pelo projeto do foguete (especificamente, é a razão entre a massa do foguete sem combustível e sem carga e a massa do foguete com carga e combustível) e c é a velocidade (constante) de exaustão relativa do foguete.

Considere agora um foguete de três estágios e carga de massa A. Vamos supor que as forças externas sejam desprezíveis e que c e S permaneçam constantes em cada estágio. Se M_i é a massa do i-ésimo estágio, podemos inicialmente considerar que o propulsor do foguete tenha massa M_1 e sua carga tenha massa $M_2 + M_3 + A$; o segundo e terceiro estágios podem ser tratados da mesma forma.

1. Mostre que a velocidade atingida depois que os três estágios são ejetados é dada por

$$v_f = c\left[\ln\left(\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{SM_1 + M_2 + M_3 + A}\right) + \ln\left(\frac{M_2 + M_3 + A}{SM_2 + M_3 + A}\right) + \ln\left(\frac{M_3 + A}{SM_3 + A}\right)\right]$$

2. Desejamos minimizar a massa total $M = M_1 + M_2 + M_3$ do propulsor do foguete sujeita à restrição que a velocidade desejada v_f do Problema 1 seja atingida. O método dos multiplicadores de Lagrange é apropriado, mas é difícil implementá-lo usando as expressões de que dispomos até aqui. Para simplificar, definimos variáveis N_i de modo que a restrição possa ser expressa como $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. Como é difícil exprimir M em termos dos N_i, é desejável usar uma função mais simples, que ao ser minimizada leve também à minimização de M. Mostre que

$$\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{M_2 + M_3 + A} = \frac{(1-S)N_1}{1 - SN_1}$$

$$\frac{M_2 + M_3 + A}{M_3 + A} = \frac{(1-S)N_2}{1 - SN_2}$$

$$\frac{M_3 + A}{A} = \frac{(1 - S)N_3}{1 - SN_3}$$

e conclua que

$$\frac{M + A}{A} = \frac{(1 - S)^3 N_1 N_2 N_3}{(1 - SN_1)(1 - SN_2)(1 - SN_3)}$$

3. Verifique que $\ln((M + A)/A)$ tem os mesmos pontos de mínimo que M; utilize os multiplicadores de Lagrange e o resultado do Problema 2 para determinar as expressões para os valores de N_i onde o mínimo ocorre sujeito à restrição $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. [*Sugestão*: Utilize as propriedades dos logaritmos para ajudar a simplificar as expressões.]

4. Determine uma expressão para o valor mínimo de M como função de v_f.

5. Se desejarmos colocar um foguete de três estágios em uma órbita 160 km acima da superfície terrestre, a velocidade final necessária é de aproximadamente 28 000 km/h. Suponha que cada estágio seja construído com um fator estrutural $S = 0,2$ e que a velocidade de exaustão seja $c = 9\,600$ km/h.

(a) Determine a massa total mínima M do propulsor do foguete como função de A.

(b) Determine a massa de cada estágio como função de A. (Eles não precisam ter tamanhos iguais!)

6. O mesmo foguete precisaria de uma velocidade final de 39 700 km/h, aproximadamente, para escapar da gravidade terrestre. Determine a massa de cada estágio que minimizaria a massa total do propulsor do foguete e lhe permitiria carregar uma sonda de 200 kg para o espaço.

PROJETO APLICADO

OTIMIZAÇÃO DE UMA TURBINA HIDRÁULICA

A Katahdin Paper Company, de Millinocket, no estado de Maine, opera uma usina hidroelétrica no rio Penobscot. A água é bombeada de uma represa para a usina geradora de potência. A taxa pela qual a água flui nas tubulações varia, dependendo de condições externas.

A usina geradora de potência tem três turbinas hidroelétricas diferentes; para cada uma delas, é conhecida a quantidade da potência elétrica gerada em função do fluxo de água que chega à turbina (função de potência da turbina). A água que chega pode ser distribuída em quantidades diferentes entre as turbinas, e nosso objetivo é determinar como programar essa distribuição de água para obter máxima produção de energia total para qualquer vazão.

Usando dados experimentais e a *equação de Bernoulli*, chegou-se ao modelo quadrático mostrado para a saída de potência de cada turbina, com as seguintes vazões de operação permitidas:

$$KW_1 = (-18,89 + 0,1277Q_1 - 4,08 \cdot 10^{-5}Q_1^2)(170 - 1,6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$
$$KW_2 = (-24,51 + 0,1358Q_2 - 4,69 \cdot 10^{-5}Q_2^2)(170 - 1,6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$
$$KW_3 = (-27,02 + 0,1380Q_3 - 3,84 \cdot 10^{-5}Q_3^2)(170 - 1,6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$
$$250 \leq Q_1 \leq 1\,110, \qquad 250 \leq Q_2 \leq 1\,110, \qquad 250 \leq Q_3 \leq 1\,225$$

onde

Q_i = fluxo através da turbina i em pés cúbicos por segundo
KW_i = potência gerada pela turbina i em quilowatts
Q_T = fluxo total através da usina geradora em pés cúbicos por segundo

1. Se todas as três turbinas estiverem sendo usadas, queremos determinar o fluxo Q_i em cada turbina que resultará na produção total máxima de energia. Nossas limitações são que o fluxo total precisa ser igual ao fluxo que chega à usina e que para cada turbina o fluxo esteja na faixa permitida. Consequentemente, utilize os multiplicadores de Lagrange para achar os valores de cada fluxo individual (como função de Q_T) que maximizem a produção total de energia $KW_1 + KW_2 + KW_3$ sujeita às restrições $Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_T$ e restrições de domínio de cada Q_i.

2. Para que valores de Q_T seu resultado é válido?

3. Para uma vazão de entrada de 2 500 pés^3/s, determine a distribuição para as turbinas e verifique (tentando algumas distribuições semelhantes) que seu resultado corresponde realmente a um máximo.

4. Até agora supusemos que as três turbinas estavam em operação. É possível que mais potência possa ser obtida usando somente uma turbina em algumas situações? Faça um gráfico das funções potência e utilize-o para decidir se uma vazão de entrada de 1 000 pés^3/s deveria ser distribuída para as três turbinas ou concentrada em uma só. (Se você concluir que só uma turbina deverá ser utilizada, responda: qual é ela?) E se a vazão for de somente 600 pés^3/s?

5. Talvez para alguns níveis de vazão seja vantajoso usar duas turbinas. Se a vazão de chegada for de 1 500 pés^3/s, quais duas turbinas devem ser utilizadas? Use os multiplicadores de Lagrange para determinar como a vazão deveria ser distribuída entre as duas turbinas para maximizar a energia produzida. Para essa vazão, o uso de duas turbinas é mais eficiente que o emprego das três?

6. Se a vazão de entrada for de 3 400 pés^3/s, o que você recomendaria para a empresa?

14 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. (a) O que é uma função de duas variáveis?
   (b) Descreva três métodos para visualizar uma função de duas variáveis.

2. O que é uma função de três variáveis? Como você pode visualizar tal função?

3. O que
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$
significa? Como mostrar que esse limite não existe?

4. (a) O que significa dizer que f é contínua em (a, b)?
   (b) Se f é contínua em $\mathbb{R}^2$, o que você pode dizer de seu gráfico?

5. (a) Escreva as expressões para as derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ como limites.
   (b) Como você interpreta $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ geometricamente? Como as interpreta como taxas de variação?
   (c) Se $f(x, y)$ é dada por uma fórmula, como calcular f_x e f_y?

6. O que o Teorema de Clairaut diz?

7. Como achar o plano tangente a cada um dos seguintes tipos de superfície?
   (a) Um gráfico de uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$
   (b) Uma superfície de nível de uma função de três variáveis, $F(x, y, z) = k$

8. Defina a linearização de f em (a, b). Qual é a correspondente aproximação linear? Qual é a interpretação geométrica da aproximação linear?

9. (a) O que significa dizer que f é diferenciável em (a, b)?
   (b) Como usualmente verificamos que f é diferenciável?

10. Se $z = f(x, y)$, o que são as diferenciais dx, dy e dz?

11. Diga qual é a Regra da Cadeia para o caso em que $z = f(x, y)$ e x e y são funções de uma única variável. E se x e y são funções de duas variáveis?

12. Se z é definido implicitamente como uma função de x e y por uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$, como determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$?

13. (a) Escreva uma expressão como limite para a derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. Como interpretá-la como taxa de variação? Como interpretá-la geometricamente?
(b) Se f é diferenciável, escreva uma expressão para $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ em termos de f_x e f_y.

14. (a) Defina o vetor gradiente ∇f de uma função f de duas ou três variáveis.
(b) Exprima $D_{\mathbf{u}} f$ em termos de ∇f.
(c) Explique o significado geométrico do gradiente.

15. O que as seguintes sentenças significam?
(a) f tem um máximo local em (a, b).
(b) f tem um máximo absoluto em (a, b).
(c) f tem um mínimo local em (a, b).
(d) f tem um mínimo absoluto em (a, b).
(e) f tem um ponto de sela em (a, b).

16. (a) Se f tem um máximo local em (a, b), o que você pode dizer de suas derivadas parciais em (a, b)?
(b) O que é um ponto crítico de f?

17. Qual é o Teste da Segunda Derivada?

18. (a) O que é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^2$? O que é um conjunto limitado?
(b) Dê o enunciado do Teorema dos Valores Extremos para as funções de duas variáveis.
(c) Como achar os valores que o Teorema dos Valores Extremos garante existirem?

19. Explique como o método dos multiplicadores de Lagrange funciona para determinar os valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = k$. E se tivermos uma segunda restrição $h(x, y, z) = c$?

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. $f_y(a, b) = \lim_{y \to b} \dfrac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$

2. Existe uma função f com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, tais que $f_x(x, y) = x + y^2$ e $f_y(x, y) = x - y^2$.

3. $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$

4. $D_{\mathbf{k}} f(x, y, z) = f_z(x, y, z)$

5. Se $f(x, y) \to L$ quando $(x, y) \to (a, b)$ ao longo de toda reta que passa por (a, b), então $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = L$.

6. Se $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ existem, então f é diferenciável em (a, b).

7. Se f tem um mínimo local em (a, b) e f é diferenciável em (a, b), então $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

8. Se f é uma função, então
$$\lim_{(x,y)\to(2,5)} f(x, y) = f(2, 5)$$

9. Se $f(x, y) = \ln y$, então $\nabla f(x, y) = 1/y$.

10. Se $(2, 1)$ é um ponto crítico de f e
$$f_{xx}(2, 1) f_{yy}(2, 1) < [f_{xy}(2, 1)]^2$$
então f tem um ponto de sela em $(2, 1)$.

11. Se $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$, então $-\sqrt{2} \leq D_{\mathbf{u}} f(x, y) \leq \sqrt{2}$.

12. Se $f(x, y)$ tem dois máximos locais, então f tem um mínimo local.

EXERCÍCIOS

1–2 Determine e esboce o domínio da função.

1. $f(x, y) = \ln(x + y + 1)$

2. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x^2}$

3–4 Esboce o gráfico da função.

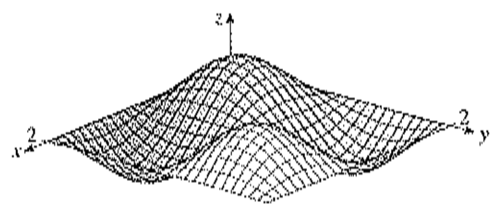
3. $f(x, y) = 1 - y^2$

4. $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$

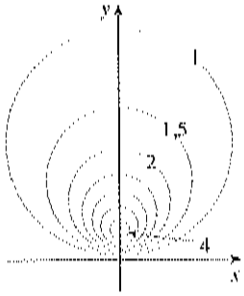
5–6 Esboce várias curvas de nível da função.

5. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$ **6.** $f(x, y) = e^x + y$

7. Faça um esboço de um mapa de contorno da função cujo gráfico está mostrado.



8. Um mapa de contorno de uma função f é apresentado. Use-o para fazer um esboço do gráfico da f.



9-10 Calcule o limite ou mostre que ele não existe.

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2xy}{x^2+2y^2}$ **10.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+2y^2}$

11. Uma placa de metal está situada no plano xy e ocupa o retângulo $0 \leqslant x \leqslant 10$, $0 \leqslant y \leqslant 8$, onde x e y são medidos em metros. A temperatura no ponto (x, y) do plano é $T(x, y)$, onde T é medido em graus Celsius. Temperaturas em pontos igualmente espaçados foram medidas e registradas na tabela.

(a) Estime o valor das derivadas parciais $T_x(6, 4)$ e $T_y(6, 4)$. Quais são as unidades?

(b) Estime o valor de $D_{\mathbf{u}}T(6, 4)$, onde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$. Interprete o resultado.

(c) Estime o valor de $T_{xy}(6, 4)$.

x \ y	0	2	4	6	8
0	30	38	45	51	55
2	52	56	60	62	61
4	78	74	72	68	66
6	98	87	80	75	71
8	96	90	86	80	75
10	92	92	91	87	78

12. Determine uma aproximação linear para a função temperatura $T(x, y)$ do Exercício 11 perto do ponto $(6, 4)$. Em seguida use-a para estimar a temperatura no ponto $(5, 3,8)$.

13-17 Determine as derivadas parciais de primeira ordem.

13. $f(x, y) = \sqrt{2x + y^2}$ **14.** $u = e^{-r}\,\text{sen}\,2\theta$

15. $g(u, v) = u\,\text{tg}^{-1}v$ **16.** $w = \dfrac{x}{y - z}$

17. $T(p, q, r) = p\ln(q + e^r)$

18. A velocidade da propagação da onda sonora no oceano é uma função da temperatura, da salinidade e da pressão. Foi modelada como

$$C = 1\,449{,}2 + 4{,}6T - 0{,}055T^2 + 0{,}00029T^3 + (1{,}34 - 0{,}01T)(S - 35) + 0{,}016D$$

onde C é a velocidade do som (em metros por segundo), T é a temperatura (em graus Celsius), S é a salinidade (concentração de sal em partes por milhar, o que significa o número de gramas de sólidos dissolvidos por 1 000 g de água) e D é a profundidade abaixo da superfície do oceano (em metros). Calcule $\partial C/\partial T$, $\partial C/\partial S$, $\partial C/\partial D$ quando $T = 10\ °\text{C}$, $S = 35$ partes por milhar e $D = 100$ m. Explique o significado físico dessas derivadas parciais.

19-22 Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem de f.

19. $f(x, y) = 4x^3 - xy^2$ **20.** $z = xe^{-2y}$

21. $f(x, y, z) = x^k y^l z^m$ **22.** $v = r\cos(s + 2t)$

23. Se $z = xy + xe^{y/x}$, mostre que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

24. Se $z = \text{sen}(x + \text{sen}\,t)$, mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

25-29 Encontre uma equação (a) do plano tangente e (b) da reta normal à superfície dada no ponto especificado.

25. $z = 3x^2 - y^2 + 2x$, $(1, -2, 1)$

26. $z = e^x\cos y$, $(0, 0, 1)$

27. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 3$, $(2, -1, 1)$

28. $xy + yz + zx = 3$, $(1, 1, 1)$

29. $\text{sen}(xyz) = x + 2y + 3z$, $(2, -1, 0)$

30. Use um computador para traçar o gráfico da superfície $z = x^2 + y^4$ e de seu plano tangente e reta normal em $(1, 1, 2)$ na mesma tela. Escolha o domínio e ponto de vista para obter uma boa visão dos três objetos.

31. Encontre os pontos no hiperboloide $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ onde o plano tangente é paralelo ao plano $2x + 2y + z = 5$.

32. Determine du se $u = \ln(1 + se^{2t})$.

33. Determine a aproximação linear da função $f(x, y, z) = x^3\sqrt{y^2 + z^2}$ no ponto $(2, 3, 4)$ e use-a para estimar o número $(1{,}98)^3\sqrt{(3{,}01)^2 + (3{,}97)^2}$.

34. Os dois catetos de um triângulo retângulo medem 5 m e 12 m com um erro possível nas medidas de, no máximo, 0,2 cm em cada. Utilize diferenciais para estimar o erro máximo no cálculo (a) da área do triângulo e (b) do comprimento da hipotenusa.

35. Se $u = x^2y^3 + z^4$, onde $x = p + 3p^2$, $y = pe^p$ e $z = p\,\text{sen}\,p$, use a Regra da Cadeia para encontrar du/dp.

36. Se $v = x^2\,\text{sen}\,y + ye^{xy}$, onde $x = s + 2t$ e $y = st$, use a Regra da Cadeia para encontrar $\partial v/\partial s$ e $\partial v/\partial t$ quando $s = 0$ e $t = 1$.

37. Suponha que $z = f(x, y)$, onde $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, $g(1, 2) = 3$, $g_s(1, 2) = -1$, $g_t(1, 2) = 4$, $h(1, 2) = 6$,

$h_s(1, 2) = -5$, $h_t(1, 2) = 10$, $f_x(3, 6) = 7$ e $f_y(3, 6) = 8$. Determine $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$ quando $s = 1$ e $t = 2$.

38. Utilize o diagrama em árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso onde $w = f(t, u, v)$, $t = t(p, q, r, s)$, $u = u(p, q, r, s)$ e $v = v(p, q, r, s)$, todas diferenciáveis.

39. Se $z = y + f(x^2 - y^2)$, onde f é diferenciável, mostre que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

40. O comprimento x de um lado de um triângulo está aumentando a uma taxa de 6 cm/s, o comprimento y de um outro lado está diminuindo a uma taxa de 4 cm/s e o ângulo θ entre eles está aumentando a uma taxa de 0,05 radiano/s. Quão rapidamente está variando a área do triângulo quando $x = 80$ cm, $y = 100$ cm e $\theta = \pi/6$?

41. Se $z = f(u, v)$, onde $u = xy$, $v = y/x$ e f têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas, mostre que

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4uv\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + 2v\frac{\partial z}{\partial v}$$

42. Se $yz^4 + x^2z^3 = e^{xyz}$, determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

43. Determine o gradiente da função $f(x, y, z) = z^2e^{x\sqrt{y}}$.

44. (a) Quando a derivada direcional de f é máxima?
(b) Quando é mínima?
(c) Quando é 0?
(d) Quando é a metade de seu valor máximo?

45-46 Determine a derivada direcional de f no ponto dado na direção indicada.

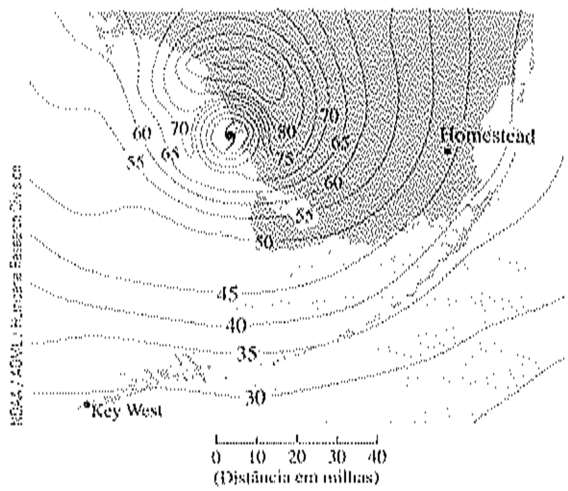
45. $f(x, y) = 2\sqrt{x} - y^2$, $(1, 5)$, na direção do ponto $(4, 1)$

46. $f(x, y, z) = x^2y + x\sqrt{1 + z}$, $(1, 2, 3)$, na direção de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

47. Determine a taxa máxima de variação de $f(x, y) = x^2y + \sqrt{y}$ no ponto $(2, 1)$. Em que direção isso ocorre?

48. Determine a direção na qual $f(x, y, z) = ze^{xy}$ aumenta mais rápido no ponto $(0, 1, 2)$. Qual é a taxa máxima de aumento?

49. O mapa de contorno mostra a velocidade do vento em nós durante o furacão Andrew em 24 de agosto de 1992. Utilize-o para estimar o valor da derivada direcional da velocidade do vento em Homestead, Flórida, na direção do olho do furacão.



50. Determine as equações paramétricas da reta tangente no ponto $(-2, 2, 4)$ à curva de intersecção da superfície $z = 2x^2 - y^2$ com o plano $z = 4$.

51-54 Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela da função. Se você tiver um programa de computador para desenhar em três dimensões, trace o gráfico da função usando um ponto de vista e domínio conveniente para mostrar os aspectos importantes da função.

51. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$

52. $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$

53. $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$

54. $f(x, y) = (x^2 + y)e^{y/2}$

55-56 Determine os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto D.

55. $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$; D é a região triangular fechada do plano xy com vértices $(0, 0)$, $(0, 6)$ e $(6, 0)$

56. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$; D é o disco $x^2 + y^2 \leq 4$

57. Utilize o gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximo e mínimo e os pontos de sela de $f(x, y) = x^3 - 3x + y^4 - 2y^2$. Em seguida, use o cálculo para determinar esses valores de modo preciso.

58. Use uma calculadora gráfica ou um computador (método de Newton ou sistema de computação algébrica) para determinar os pontos críticos de $f(x, y) = 12 + 10y - 2x^2 - 8xy - y^4$ com precisão de três casas decimais. Em seguida, classifique os pontos críticos e determine o ponto mais alto do gráfico.

59-62 Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo de f sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

59. $f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + y^2 = 1$

60. $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}; \quad \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$

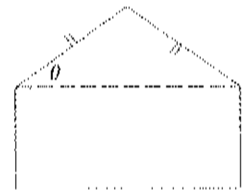
61. $f(x, y, z) = xyz; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3$

62. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2;$
$x + y + z = 1, x - y + 2z = 2$

63. Determine os pontos da superfície $xy^2z^3 = 2$ que estão mais próximos da origem.

64. Um pacote com o formato de uma caixa retangular pode ser enviado pelo correio como encomenda postal se a soma de seu comprimento e cintura (perímetro da secção transversal ortogonal ao comprimento) for de, no máximo, 108 pol. Determine as dimensões do pacote de maior volume que pode ser enviado como encomenda postal.

65. Um pentágono é formado colocando-se um triângulo isósceles sobre um retângulo, como mostrado na figura. Se o pentágono tem perímetro P fixo, determine os comprimentos dos lados do pentágono que maximiza sua área.



66. Uma partícula de massa m se move sobre uma superfície $z = f(x, y)$. Sejam $x = x(t)$, $y = y(t)$ as coordenadas x e y da partícula no instante t.

(a) Determine o vetor velocidade $\mathbf{v}$ e a energia cinética $K = \frac{1}{2} m \, |\mathbf{v}|^2$ da partícula.

(b) Determine o vetor aceleração $\mathbf{a}$.

(c) Seja $z = x^2 + y^2$ e $x(t) = t \cos t$, $y(t) = t \operatorname{sen} t$. Determine o vetor velocidade, a energia cinética e o vetor aceleração.

1. Um retângulo com comprimento L e largura W é cortado em quatro retângulos menores por duas retas paralelas aos lados. Determine os valores máximo e mínimo da soma dos quadrados das áreas dos retângulos menores.

2. Biólogos marinhos determinaram que, quando um tubarão detecta a presença de sangue na água, ele nada na direção em que a concentração de sangue aumenta mais rapidamente. Com base em certos testes na água do mar, sabe-se que a concentração de sangue (em partes por milhão) em um ponto $P(x, y)$ na superfície é de aproximadamente

$$C(x, y) = e^{-(x^2+2y^2)/10^4}$$

onde x e y são medidos em metros em coordenadas cartesianas com a fonte do sangue como origem.

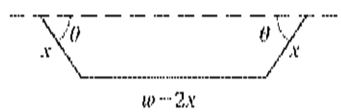
(a) Identifique as curvas de nível da função concentração e esboce vários membros dessa família, junto com a trajetória que o tubarão deve percorrer para chegar à fonte.

(b) Suponha que um tubarão esteja no ponto (x_0, y_0) quando detecta a presença de sangue na água. Determine a equação da trajetória do tubarão escrevendo e resolvendo uma equação diferencial.

3. Uma longa folha de metal galvanizado de espessura w polegadas deve ser dobrada em uma forma simétrica com três lados planos para fazer uma calha. A secção transversal é mostrada na figura.

(a) Determine as dimensões para permitir a máxima vazão, ou seja, determine as dimensões que fornecem a maior área da secção transversal.

(b) Você acharia melhor dobrar a folha de metal em uma calha com secção transversal semicircular do que em uma secção transversal de três lados?



4. Para que valores do número r a função

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{(x + y + z)^r}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}^3$?

5. Suponha que f seja uma função diferenciável de uma variável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z = xf(y/x)$ se interceptam em um ponto comum.

6. (a) O método de Newton para aproximar a raiz de uma equação $f(x) = 0$ (veja a Seção 4.8) pode ser adaptado para aproximar a solução de um sistema de equações $f(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$. As superfícies $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$ se interceptam em uma curva que intercepta o plano xy no ponto (r, s), que é a solução deste sistema. Se uma aproximação inicial (x_1, y_1) estiver próxima deste ponto, então os planos tangentes às superfícies em (x_1, y_1) se interceptam em uma reta que intercepta o plano xy em um ponto (x_2, y_2), que deveria estar mais próximo de (r, s). (Compare com a Figura 2 na Seção 4.8) Mostre que

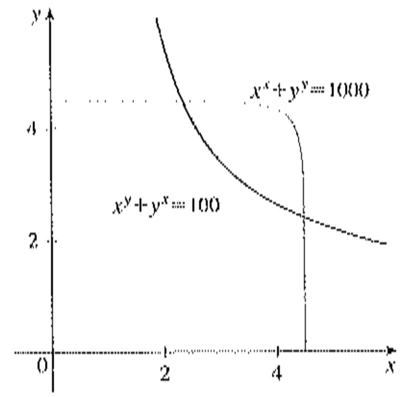
$$x_2 = x_1 - \frac{fg_y - f_y g}{f_x g_y - f_y g_x} \qquad \text{e} \qquad y_2 = y_1 - \frac{f_x g - fg_x}{f_x g_y - f_y g_x}$$

onde f, g e suas derivadas parciais são calculadas em (x_1, y_1). Se continuarmos esse processo, obteremos uma sequência de aproximações sucessivas (x_n, y_n).

(b) Foi Thomas Simpson (1710-1761) quem formulou o método de Newton como o conhecemos hoje e quem o estendeu para as funções de duas variáveis como na parte (a) (veja a biografia de Simpson na página 474, no Volume I). O exemplo que ele deu para ilustrar o método foi resolver o sistema de equações

$$x^x + y^y = 1\,000 \qquad x^y + y^x = 100$$

Em outras palavras, ele descobriu os pontos de intersecção das curvas da figura. Utilize o método da parte (a) para determinar as coordenadas dos pontos de intersecção com precisão de seis casas decimais.



7. Se a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ circunda a circunferência $x^2 + y^2 = 2y$, quais são os valores de a e b que minimizam a área da elipse?

8. Entre todos os planos que são tangentes à superfície $xy^2z^2 = 1$, determine os que estão mais longe da origem.