13.1 EXERCÍCIOS

1-2 Determine o domínio das funções vetoriais.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t}\,\rangle$

2. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{t-2}{t+2}\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \ln(9-t^2)\,\mathbf{k}$

3-6 Calcule os limites.

3. $\lim\limits_{t\to 0^+} \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t\ln t\rangle$

4. $\lim\limits_{t\to 0} \left\langle \dfrac{e^t-1}{t}, \dfrac{\sqrt{1+t}-1}{t}, \dfrac{3}{t+1}\right\rangle$

5. $\lim\limits_{t\to 0} \left(e^{-3t}\,\mathbf{i} + \dfrac{t^2}{\operatorname{sen}^2 t}\,\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k}\right)$

6. $\lim\limits_{t\to \infty} \left\langle \operatorname{arctg} t, e^{-2t}, \dfrac{\ln t}{t}\right\rangle$

7-14 Esboce o gráfico da curva cuja equação vetorial é dada. Indique com setas a direção na qual o parâmetro cresce.

7. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, t\rangle$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2\rangle$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t\rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle 1+t, 3t, -t\rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, 3, \cos t\rangle$

12. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^4\,\mathbf{j} + t^6\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$

15-18 Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga P e Q.

15. $P(0, 0, 0)$, $Q(1, 2, 3)$

16. $P(1, 0, 1)$, $Q(2, 3, 1)$

17. $P(1, -1, 2)$, $Q(4, 1, 7)$

18. $P(-2, 4, 0)$, $Q(6, -1, 2)$

19-24 Faça uma correspondência entre as equações paramétricas e os gráficos (identificados com números de I-VI). Justifique sua escolha.

19. $x = \cos 4t$, $y = t$, $z = \operatorname{sen} 4t$

20. $x = t$, $y = t^2$, $z = e^{-t}$

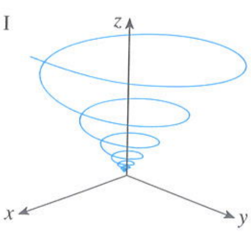
21. $x = t$, $y = 1/(1+t^2)$, $z = t^2$

22. $x = e^{-t}\cos 10t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen} 10t$, $z = e^{-t}$

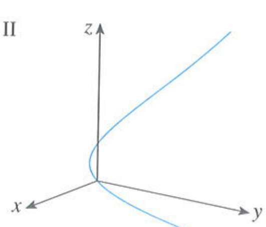
23. $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \operatorname{sen} 5t$

24. $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \ln t$

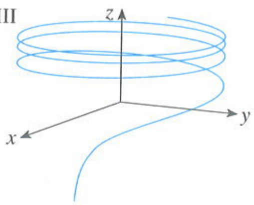
I



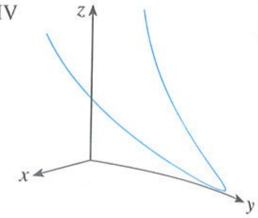
II



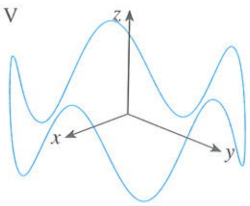
III



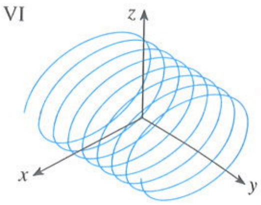
IV



V



VI



25. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t\cos t$, $y = t\operatorname{sen} t$, $z = t$ está no cone $z^2 = x^2 + y^2$, e use esse fato para esboçar a curva.

26. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen}^2 t$ é a curva de intersecção das superfícies $z = x^2$ e $x^2 + y^2 = 1$. Use esse fato para esboçar a curva.

27. Em quais pontos a curva $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + (2t - t^2)\mathbf{k}$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$?

28. Em quais pontos a hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t\rangle$ intercepta a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$?

29-32 Utilize um computador para traçar a curva da equação vetorial dada. Escolha o domínio do parâmetro e ponto de vista de forma a revelar a verdadeira natureza da curva.

29. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t \operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t, \cos 2t\rangle$

30. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \ln t, t\rangle$

31. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t\operatorname{sen} t, t\cos t\rangle$

32. $\mathbf{r}(t) = \langle t, e^t, \cos t\rangle$

33. Trace a curva com equações paramétricas
$x = (1 + \cos 16t)\cos t$, $y = (1 + \cos 16t)\operatorname{sen} t$,
$z = 1 + \cos 16t$.
Explique a aparência da curva, mostrando que ela está em um cone.

34. Trace a curva com equações paramétricas

$$x = \sqrt{1 - 0{,}25\cos^2 10t}\,\cos t$$
$$y = \sqrt{1 - 0{,}25\cos^2 10t}\,\operatorname{sen} t$$
$$z = 0{,}5\cos 10t$$

Explique a aparência da curva, mostrando que ela está em uma esfera.

35. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t^2$, $y = 1 - 3t$, $z = 1 + t^3$ passa pelos pontos $(1, 4, 0)$ e $(9, -8, 28)$, mas não passa pelo ponto $(4, 7, -6)$.

36-38 Determine a função vetorial que representa a curva obtida pela intersecção das duas superfícies.

36. O cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e a superfície $z = xy$

37. O cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $z = 1 + y$

38. O paraboloide $z = 4x^2 + y^2$ e o cilindro parabólico $y = x^2$

39. Tente esboçar à mão a curva obtida pela intersecção do cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ com o cilindro parabólico $z = x^2$. Determine então as equações paramétricas dessa curva e utilize um computador para desenhá-la.

40. Tente esboçar à mão a intersecção do cilindro parabólico $y = x^2$ com a metade superior do elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$. Escreva então as equações paramétricas para a curva e utilize um computador para traçá-la.

41. Se dois objetos viajam pelo espaço ao longo de duas curvas diferentes, é sempre importante saber se eles vão colidir. (Um míssil vai atingir seu alvo móvel? Duas aeronaves vão colidir?) As curvas podem se interceptar, mas precisamos saber se os objetos estarão na mesma posição *no mesmo instante*. Suponha que as trajetórias de duas partículas sejam dadas pelas seguintes funções vetoriais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t^2, 7t - 12, t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 4t - 3, t^2, 5t - 6 \rangle$$

para $t \geqslant 0$. As partículas colidem?

42. Duas partículas se movem ao longo das curvas espaciais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t \rangle$$

As partículas colidem? Suas trajetórias se interceptam?

43. Suponha que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sejam funções vetoriais que possuem limites quando $t \to a$ e seja c uma constante. Demonstre as seguintes propriedades de limites.

(a) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) + \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(b) $\lim_{t \to a} c\mathbf{u}(t) = c \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t)$

(c) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) \cdot \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(d) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) \times \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

44. A visão do nó de trevo apresentada na Figura 8 é correta, mas não muito reveladora. Use as equações paramétricas

$$x = (2 + \cos 1{,}5t) \cos t$$
$$y = (2 + \cos 1{,}5t) \operatorname{sen} t$$
$$z = \operatorname{sen} 1{,}5t$$

para esboçar à mão a curva vista de cima, deixando pequenas falhas para indicar os pontos onde a curva se sobrepõe. Comece mostrando que sua projeção sobre o plano xy tem coordenadas polares $r = 2 + \cos 1{,}5t$ e $\theta = t$, de forma que r varia entre 1 e 3. Mostre então que z tem um valor máximo e um mínimo quando a projeção está entre $r = 1$ e $r = 3$.

Quando você terminar o esboço à mão livre, utilize um computador para traçar a curva com o observador vendo de cima e compare-a ao seu desenho. Trace a curva sob outros pontos de vista. Você alcançará melhor resultado se traçar um tubo de raio 0,2 em torno da curva. (Utilize o comando tubeplot no Maple.)

45. Mostre que $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$ se e somente se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |t - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}| < \varepsilon$$

13.2 DERIVADAS E INTEGRAIS DE FUNÇÕES VETORIAIS

Mais adiante neste capítulo, utilizaremos as funções vetoriais para descrever o movimento dos planetas e outros objetos no espaço. Vamos nos preparar aqui para desenvolver o cálculo com funções vetoriais.

DERIVADAS

A **derivada** $\mathbf{r}'$ de uma função vetorial $\mathbf{r}$ é definida do mesmo modo como foi feito para as funções a valores reais:

1
$$\boxed{\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h}}$$

se este limite existir. O significado geométrico dessa definição está representado na Figura 1. Se os pontos P e Q têm vetores posição $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t + h)$, então $\overrightarrow{PQ}$ representa o vetor $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$, que pode ser visto como um vetor secante. Se $h > 0$, o múltiplo por escalar $(1/h)(\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t))$ tem a mesma direção e sentido que $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$. Quando então,

$$\boxed{\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\mathbf{k}}$$

Isso mostra que podemos calcular a integral da função vetorial integrando cada componente dela.

Podemos estender o Teorema Fundamental do Cálculo para as funções vetoriais contínuas como segue:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

onde $\mathbf{R}$ é uma primitiva de $\mathbf{r}$, ou seja, $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$. Usaremos a notação $\int \mathbf{r}(t)\,dt$ para as integrais indefinidas (primitivas).

EXEMPLO 5 Se $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$, então

$$\begin{aligned}\int \mathbf{r}(t)\,dt &= \left(\int 2\cos t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int \operatorname{sen} t\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{k}\\ &= 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k} + \mathbf{C}\end{aligned}$$

onde $\mathbf{C}$ é um vetor constante de integração, e

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t)\,dt = \left[2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}\right]_0^{\pi/2} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{\pi^2}{4}\,\mathbf{k}$$ □

13.2 EXERCÍCIOS

1. A figura mostra uma curva C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.

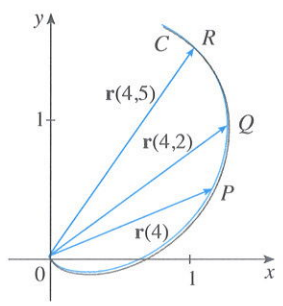
(a) Desenhe os vetores $\mathbf{r}(4{,}5) - \mathbf{r}(4)$ e $\mathbf{r}(4{,}2) - \mathbf{r}(4)$.

(b) Esboce os vetores

$$\frac{\mathbf{r}(4{,}5) - \mathbf{r}(4)}{0{,}5} \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{r}(4{,}2) - \mathbf{r}(4)}{0{,}2}$$

(c) Escreva a expressão para $\mathbf{r}'(4)$ e para seu vetor tangente unitário $\mathbf{T}(4)$.

(d) Desenhe o vetor $\mathbf{T}(4)$.



Explique por que esses vetores estão tão próximos um do outro tanto em módulo quanto em direção e sentido.

2. (a) Faça um esboço grande da curva descrita pela função vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t\rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, e desenhe os vetores $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1{,}1)$ e $\mathbf{r}(1{,}1) - \mathbf{r}(1)$.

(b) Desenhe o vetor $\mathbf{r}'(1)$ começando em $(1, 1)$ e o compare com o vetor

$$\frac{\mathbf{r}(1{,}1) - \mathbf{r}(1)}{0{,}1}$$

3-8

(a) Esboce o gráfico da curva plana com a equação vetorial dada.

(b) Determine $\mathbf{r}'(t)$.

(c) Esboce o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ e o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ para o valor dado de t.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle t - 2, t^2 + 1\rangle$, $\quad t = -1$

4. $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, \sqrt{t}\rangle$, $\quad t = 1$

5. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$, $\quad t = \pi/4$

6. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j}$, $\quad t = 0$

7. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{3t}\,\mathbf{j}$, $\quad t = 0$

8. $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\,\mathbf{i} + (2 + \operatorname{sen} t)\,\mathbf{j}$, $\quad t = \pi/6$

9-16 Determine a derivada da função vetorial.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t\operatorname{sen} t, t^2, t\cos 2t\rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{tg} t, \sec t, 1/t^2\rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + e^{4t}\,\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^{-1} t\,\mathbf{i} + \sqrt{1 - t^2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = e^{t^2}\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln(1 + 3t)\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = at\cos 3t\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}^3 t\,\mathbf{j} + c\cos^3 t\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b} + t^2\mathbf{c}$

16. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + t\,\mathbf{c})$

17-20 Determine o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$ no ponto com valor de parâmetro t dado.

17. $\mathbf{r}(t) = \langle 6t^5, 4t^3, 2t\rangle, \quad t = 1$

18. $\mathbf{r}(t) = 4\sqrt{t}\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad t = 1$

19. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{k}, \quad t = 0$

20. $\mathbf{r}(t) = 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + \text{tg}\,t\,\mathbf{k}, \quad t = \pi/4$

21. Se $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$, encontre $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{T}(1)$, $\mathbf{r}''(t)$ e $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$.

22. Se $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t}\rangle$, determine $\mathbf{T}(0)$, $\mathbf{r}''(0)$ e $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$.

23-26 Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.

23. $x = t^5, \quad y = t^4, \quad z = t^3; \quad (1, 1, 1)$

24. $x = t^2 - 1, \quad y = t^2 + 1, \quad z = t + 1; \quad (-1, 1, 1)$

25. $x = e^{-t}\cos t, \quad y = e^{-t}\,\text{sen}\,t, \quad z = e^{-t}; \quad (1, 0, 1)$

26. $x = \ln t, \quad y = 2\sqrt{t}, \quad z = t^2; \quad (0, 2, 1)$

27-29 Encontre as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado. Ilustre traçando o gráfico da curva e da reta tangente em uma mesma tela.

27. $x = t, \quad y = e^{-t}, \quad z = 2t - t^2; \quad (0, 1, 0)$

28. $x = 2\cos t, \quad y = 2\,\text{sen}\,t, \quad z = 4\cos 2t; \quad (\sqrt{3}, 1, 2)$

29. $x = t\cos t, \quad y = t, \quad z = t\,\text{sen}\,t; \quad (-\pi, \pi, 0)$

30. (a) Determine o ponto de intersecção das retas tangentes à curva $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen}\,\pi t, 2\,\text{sen}\,\pi t, \cos \pi t\rangle$ nos pontos $t = 0$ e $t = 0{,}5$.
(b) Ilustre traçando o gráfico da curva e ambas as tangentes.

31. As curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$ e $\mathbf{r}_2(t) = \langle \text{sen}\,t, \text{sen}\,2t, t\rangle$ se interceptam na origem. Determine o ângulo de intersecção destas com precisão de um grau.

32. Em que ponto as curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 1 - t, 3 + t^2\rangle$ e $\mathbf{r}_2(s) = \langle 3 - s, s - 2, s^2\rangle$ se interceptam? Encontre o ângulo entre elas no ponto de intersecção, com precisão de um grau.

33-38 Calcule a integral.

33. $\int_0^1 (16t^3\,\mathbf{i} - 9t^2\,\mathbf{j} + 25t^4\,\mathbf{k})\,dt$

34. $\int_0^1 \left(\dfrac{4}{1 + t^2}\,\mathbf{j} + \dfrac{2t}{1 + t^2}\,\mathbf{k}\right) dt$

35. $\int_0^{\pi/2} (3\,\text{sen}^2 t\cos t\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,t\cos^2 t\,\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,t\cos t\,\mathbf{k})\,dt$

36. $\int_1^2 (t^2\,\mathbf{i} + t\sqrt{t - 1}\,\mathbf{j} + t\,\text{sen}\,\pi t\,\mathbf{k})\,dt$

37. $\int (e^t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k})\,dt$

38. $\int (\cos \pi t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\pi t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k})\,dt$

39. Encontre $\mathbf{r}(t)$ se $\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + \sqrt{t}\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

40. Encontre $\mathbf{r}(t)$ se $\mathbf{r}'(t) = t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + te^t\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

41. Demonstre a Fórmula 1 do Teorema 3.

42. Demonstre a Fórmula 3 do Teorema 3.

43. Demonstre a Fórmula 5 do Teorema 3.

44. Demonstre a Fórmula 6 do Teorema 3.

45. Se $\mathbf{u}(t) = \langle \text{sen}\,t, \cos t, t\rangle$ e $\mathbf{v}(t) = \langle t, \cos t, \text{sen}\,t\rangle$, use a Fórmula 4 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt}\,[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$$

46. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são as funções vetoriais no Exercício 45, use a Fórmula 5 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt}\,[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]$$

47. Mostre que se $\mathbf{r}$ é uma função vetorial tal que exista $\mathbf{r}''$, então

$$\frac{d}{dt}\,[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

48. Determine uma expressão para $\dfrac{d}{dt}\,[\mathbf{u}(t) \cdot (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}(t))]$.

49. Se $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$, mostre que $\dfrac{d}{dt}\,|\mathbf{r}(t)| = \dfrac{1}{|\mathbf{r}(t)|}\,\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$.

[*Sugestão*: $|\mathbf{r}(t)|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$]

50. Se uma curva tem a propriedade de o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ estar sempre perpendicular ao vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$, mostre que essa curva está em uma esfera com o centro na origem.

51. Se $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$, mostre que

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$$

13 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. O que é uma função vetorial? Como calcular sua derivada e sua integral?
2. Qual a relação entre funções vetoriais e curvas espaciais?
3. Como achar o vetor tangente a uma curva lisa em um ponto? Como achar a reta tangente? Como determinar o vetor tangente unitário?
4. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são funções vetoriais diferenciáveis, c é um escalar e f é uma função real, escreva as regras para derivar as seguintes funções vetoriais:
   (a) $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$ (b) $c\mathbf{u}(t)$ (c) $f(t)\mathbf{u}(t)$
   (d) $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ (e) $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$ (f) $\mathbf{u}(f(t))$
5. Como achar o comprimento de uma curva espacial dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$?
6. (a) Qual a definição de curvatura?
   (b) Escreva a fórmula para curvatura em função de $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{T}'(t)$.
   (c) Escreva a fórmula para curvatura em função de $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$.
   (d) Escreva a fórmula para curvatura de uma curva plana com equação $y = f(x)$.
7. (a) Escreva as fórmulas para os vetores normal e binormal de uma curva lisa espacial $\mathbf{r}(t)$.
   (b) O que é o plano normal de uma curva em um ponto? E o plano osculador? O que é o círculo osculador?
8. (a) Como determinar a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração de uma partícula que se move ao longo de uma curva espacial?
   (b) Escreva a aceleração em termos de suas componentes tangencial e normal.
9. Quais são as leis de Kepler?

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. A curva com equação vetorial $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + 2t^3\,\mathbf{j} + 3t^3\,\mathbf{k}$ é uma reta.
2. A derivada da função vetorial é obtida derivando cada componente da função.
3. Se $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são funções vetoriais diferenciáveis, então
$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}'(t)$$
4. Se $\mathbf{r}(t)$ é uma função vetorial diferenciável, então
$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$$
5. Se $\mathbf{T}(t)$ é o vetor tangente unitário de uma curva lisa, então a curvatura é $\kappa = |d\mathbf{T}/dt|$.
6. O vetor binormal é dado por $\mathbf{B}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{T}(t)$.
7. Suponha que f seja duas vezes continuamente diferenciável. Em um ponto de inflexão da curva $y = f(x)$, a curvatura é 0.
8. Se $\kappa = 0$ para todo t, a curva é uma reta.
9. Se $|\mathbf{r}(t)| = 1$ para todo t, então $|\mathbf{r}'(t)|$ é uma constante.
10. Se $|\mathbf{r}(t)| = 1$ para todo t, então $\mathbf{r}'(t)$ é ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ para todo t.
11. O círculo osculador de uma curva C em um ponto tem o mesmo vetor tangente, vetor normal e curvatura que C naquele ponto.
12. As parametrizações diferentes de uma mesma curva resultam em vetores tangentes idênticos em um mesmo ponto da curva.

EXERCÍCIOS

1. (a) Esboce a curva com função vetorial
$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \cos \pi t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k} \qquad t \geqslant 0$$
(b) Determine $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$.

2. Seja $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{2-t}, (e^t - 1)/t, \ln(t+1) \rangle$.
(a) Determine o domínio de $\mathbf{r}$.
(b) Determine $\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t)$.
(c) Determine $\mathbf{r}'(t)$.

3. Determine a função vetorial que representa a curva obtida pela intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ com o plano $x + z = 5$.

4. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = 2 \operatorname{sen} 2t$, $z = 2 \operatorname{sen} 3t$ no ponto $(1, \sqrt{3}, 2)$. Desenhe a curva e a tangente em uma mesma tela.

5. Se $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t \cos \pi t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k}$, calcule $\int_0^1 \mathbf{r}(t)\,dt$.

6. Seja C a curva com equações $x = 2 - t^3$, $y = 2t - 1$, $z = \ln t$. Determine (a) o ponto de intersecção de C com o plano xz, (b) as equações paramétricas da reta tangente em $(1, 1, 0)$ e (c) uma equação para o plano normal a C em $(1, 1, 0)$.

7. Utilize a Regra de Simpson com $n = 6$ para estimar o comprimento do arco da curva com equação $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$, $0 \leqslant t \leqslant 3$.

8. Determine o comprimento da curva $\mathbf{r}(t) = \langle 2t^{3/2}, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

9. A hélice $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ intercepta a curva $\mathbf{r}_2(t) = (1+t)\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$ no ponto $(1, 0, 0)$. Determine o ângulo de intersecção dessas curvas.

10. Reparametrize a curva $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + e^t \cos t\,\mathbf{k}$ em relação ao comprimento do arco de curva medido a partir do ponto $(1, 0, 1)$ na direção crescente de t.

11. Para a curva dada por $\mathbf{r}(t) = \langle \frac{1}{3} t^3, \frac{1}{2} t^2, t \rangle$, determine (a) o vetor tangente unitário, (b) o vetor normal unitário e (c) a curvatura.

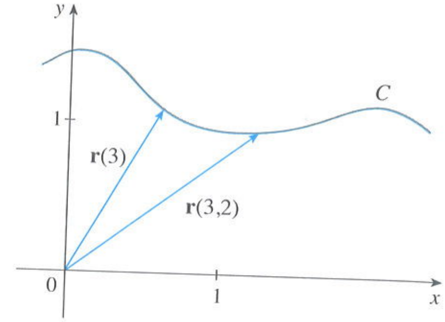
12. Determine a curvatura da elipse $x = 3 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$ nos pontos $(3, 0)$ e $(0, 4)$.

13. Encontre a curvatura da curva $y = x^4$ no ponto $(1, 1)$.

14. Determine uma equação do círculo osculador da curva $y = x^4 - x^2$ na origem. Faça o gráfico da curva e do círculo osculador.

15. Determine uma equação do plano osculador da curva $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = t$, $z = \cos 2t$ no ponto $(0, \pi, 1)$.

16. A figura mostra a curva C traçada por uma partícula com vetor posição $\mathbf{r}(t)$ no instante t.
(a) Desenhe o vetor que representa a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $3 \leqslant t \leqslant 3{,}2$.
(b) Escreva a expressão para a velocidade $\mathbf{v}(3)$.
(c) Escreva uma expressão para o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(3)$ e desenhe-o.



17. Uma partícula se move com função posição $\mathbf{r}(t) = t \ln t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}$. Determine a velocidade, a velocidade escalar e a aceleração da partícula.

18. Uma partícula começa sua trajetória na origem com velocidade inicial $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Sua aceleração é $\mathbf{a}(t) = 6t\,\mathbf{i} + 12t^2\,\mathbf{j} - 6t\,\mathbf{k}$. Determine sua função posição.

19. Um atleta arremessa um disco em um ângulo de 45° em relação à horizontal com velocidade escalar inicial de 13 m/s. Ela deixa sua mão a 2 m acima do chão.
(a) Onde está o disco 2 segundos depois?
(b) Qual a altura máxima que o disco atinge?
(c) Onde o disco atinge o chão?

20. Determine as componentes tangencial e normal do vetor aceleração de uma partícula que se move com vetor posição
$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$$

21. Um disco de raio 1 está girando no sentido anti-horário com uma velocidade angular constante ω. Uma partícula inicia no centro do disco e se move em direção às bordas em uma direção radial fixa de forma que sua posição no instante t, $t \geqslant 0$, é dada por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{R}(t)$, onde
$$\mathbf{R}(t) = \cos \omega t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}$$
(a) Mostre que a velocidade $\mathbf{v}$ da partícula é
$$\mathbf{v} = \cos \omega t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j} + t\mathbf{v}_d$$
onde $\mathbf{v}_d = \mathbf{R}'(t)$ é a velocidade do ponto na borda do disco.
(b) Mostre que a aceleração $\mathbf{a}$ da partícula é
$$\mathbf{a} = 2\,\mathbf{v}_d + t\,\mathbf{a}_d$$

onde $\mathbf{a}_d = \mathbf{R}''(t)$ é a aceleração na borda do disco. O termo extra $2\mathbf{v}_d$ é chamado *aceleração de Coriolis*; ele é o resultado da interação entre a rotação do disco e o movimento da partícula. Podemos obter uma demonstração física dessa aceleração andando em direção à borda de um carrossel.

(c) Determine a aceleração de Coriolis de uma partícula que se move em um disco rodando segundo a equação

$$\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos \omega t\, \mathbf{i} + e^{-t}\operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j}$$

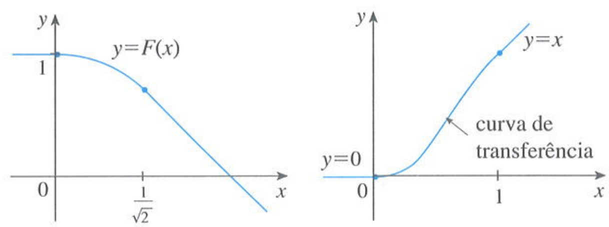
22. No projeto das *curvas de transferência*, usadas para ligar trechos retos dos trilhos de uma linha férrea, é importante entender que a aceleração do trem deve ser contínua de modo que a força de reação exercida pelo trem no trilho seja também contínua. Por causa das fórmulas obtidas na Seção 13.4 para as componentes da aceleração, este só será o caso se a curvatura variar de modo contínuo.

(a) Um candidato lógico à curva de transferência para juntar dois trilhos existentes dados por $y = 1$ para $x \leqslant 0$ e $y = \sqrt{2} - x$ para $x \geqslant 1/\sqrt{2}$ poderia ser a função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 < x < 1/\sqrt{2}$, cujo gráfico é o arco de círculo mostrado na figura. À primeira vista, parece razoável. Mostre que a função

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leqslant 0 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{se } 0 < x < 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - x & \text{se } x \geqslant 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

é contínua e tem derivada contínua, mas não tem curvatura contínua. Assim, f não é uma curva de transferência adequada.

(b) Determine um polinômio de quinto grau para servir de curva de transferência entre os dois segmentos de reta: $y = 0$ para $x \leqslant 0$ e $y = x$ para $x \geqslant 1$. Poderíamos utilizar um polinômio de quarto grau? Use uma calculadora gráfica ou computador para esboçar o gráfico da função "conectada" e verifique que ele se assemelha ao da figura.



PROBLEMAS QUENTES

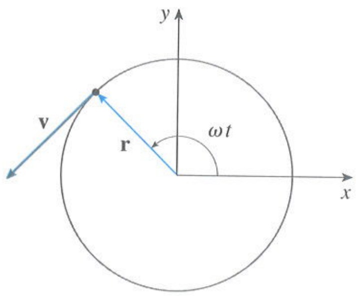


FIGURA PARA O PROBLEMA 1

1. Uma partícula P move-se com velocidade angular constante ω em torno de um círculo com centro na origem e raio R. A partícula é dita estar em *movimento circular uniforme*. Suponha que o movimento seja no sentido anti-horário e que a partícula esteja no ponto $(R, 0)$ quando $t = 0$. O vetor posição no instante $t \geqslant 0$ é $\mathbf{r}(t) = R \cos \omega t\, \mathbf{i} + R \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j}$.

(a) Determine o vetor velocidade $\mathbf{v}$ e mostre que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$. Conclua que $\mathbf{v}$ é tangente ao círculo e tem sentido igual ao do movimento.

(b) Mostre que a velocidade escalar $|\mathbf{v}|$ da partícula é a constante ωR. O *período* T da partícula é o tempo necessário para que a partícula complete uma volta. Conclua que

$$T = \frac{2\pi R}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\pi}{\omega}$$

(c) Encontre o vetor aceleração $\mathbf{a}$. Mostre que ele é proporcional a $\mathbf{r}$ e que aponta para a origem. Uma aceleração com essa propriedade é chamada *aceleração centrípeta*. Mostre que o módulo do vetor aceleração é $|\mathbf{a}| = R\omega^2$.

(d) Suponha que a partícula tenha massa m. Mostre que o módulo da força $\mathbf{F}$ que é necessária para produzir esse movimento, denominada *força centrípeta*, é

$$|\mathbf{F}| = \frac{m|\mathbf{v}|^2}{R}$$

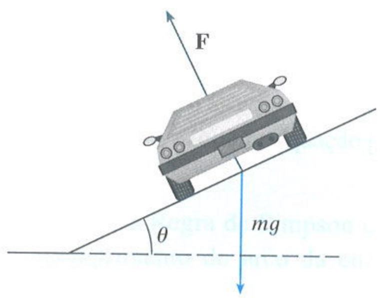


FIGURA PARA O PROBLEMA 2

2. Uma curva circular de raio R em uma autoestrada é inclinada em um ângulo de θ de modo que um carro possa passar pela curva sem derrapar quando não existe atrito entre a estrada e os pneus. A perda de atrito ocorre, por exemplo, se a estrada está coberta com uma fina camada de água ou de gelo. A velocidade escalar nominal v_R associada a uma curva é a velocidade escalar máxima que o carro pode atingir sem derrapar. Suponha que um carro de massa m esteja transpondo a curva com a velocidade escalar nominal v_R. Duas forças estarão agindo sobre o carro: a força vertical, mg, devido ao peso do carro, e uma força $\mathbf{F}$ exercida pela estrada, perpendicular a ela (veja a figura).

A componente vertical de $\mathbf{F}$ equilibra o peso do carro, de forma que $|\mathbf{F}| \cos \theta = mg$. A componente horizontal de $\mathbf{F}$ produz uma força centrípeta no carro de forma que, pela Segunda Lei de Newton e pela parte (d) do Problema 1,

$$|\mathbf{F}| = \operatorname{sen} \theta \, \frac{mv_R^2}{R}$$

(a) Mostre que $v_R^2 = Rg \operatorname{tg} \theta$.

(b) Determine a velocidade escalar nominal associada a uma curva circular de raio 120 m que é inclinada em um ângulo de 12°.

(c) Suponha que os engenheiros projetistas queiram manter a inclinação em 12°, mas desejem aumentar a velocidade escalar nominal em 50%. Nesse caso, qual deve ser o raio da curva?

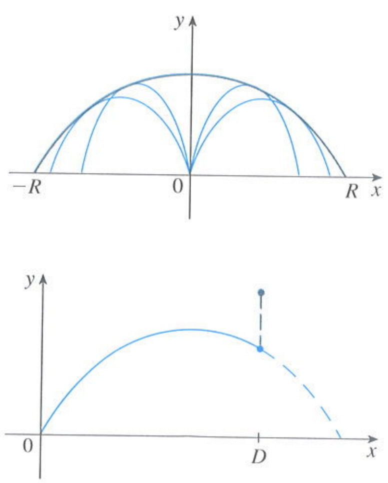


FIGURA PARA O PROBLEMA 3

3. Um projétil é disparado da origem com um ângulo de elevação α e velocidade escalar inicial v_0. Supondo que a resistência do ar seja desprezível e que a única força que age sobre o projétil seja a gravidade, g, foi mostrado no Exemplo 5 da Seção 13.4 que o vetor posição do projétil é

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \alpha)t\, \mathbf{i} + [(v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2} gt^2]\, \mathbf{j}$$

Também foi mostrado que o alcance máximo do projétil ocorre quando $\alpha = 45°$ e, nesse caso, o alcance é $R = v_0^2/g$.

(a) Qual é o ângulo no qual o projétil deve ser disparado para atingir a altura máxima e qual é essa altura?

(b) Fixe uma velocidade escalar inicial v_0 e considere a parábola $x^2 + 2Ry - R^2 = 0$, cujo gráfico é exposto na figura. Mostre que o projétil pode atingir qualquer alvo dentro ou na fronteira da região limitada pela parábola e pelo eixo x, e que o projétil não pode atingir nenhum alvo fora dessa região.

(c) Suponha que o lançador do projétil tenha um ângulo de elevação α quando mirando um alvo que esteja suspenso a uma altura h diretamente acima de um ponto D unidades à frente. O alvo é solto no instante em que o projétil é lançado. Mostre que o projétil sempre atinge o alvo, independentemente da velocidade v_0, desde que o projétil não atinja o solo "antes" de D.

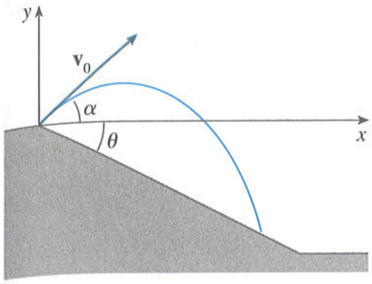


FIGURA PARA O PROBLEMA 4

4. (a) Um projétil é disparado a partir da origem em direção a um plano inclinado para baixo em um ângulo θ com a horizontal. O ângulo de elevação do lançador e a velocidade escalar inicial do projétil são respectivamente α e v_0. Encontre o vetor posição do projétil e as equações paramétricas da trajetória do projétil como funções do tempo t. (Despreze a resistência do ar.)

(b) Mostre que o ângulo α de elevação que vai maximizar o alcance do projétil no plano inclinado é a metade do ângulo entre o plano e a vertical.

(c) Suponha que o projétil seja lançado sobre um plano inclinado para cima cujo ângulo de inclinação é θ. Mostre que, a fim de maximizar o alcance (ladeira acima), o projétil deverá ser disparado em direção à metade do ângulo entre o plano e a vertical.

(d) Em um artigo apresentado em 1686, Edmond Halley resumiu as leis da gravitação e do movimento de projéteis e as aplicou à artilharia. Um dos problemas propostos por ele envolvia disparar um projétil para atingir um alvo a uma distância R em um plano inclinado para cima. Mostre que o ângulo no qual o projétil deve ser disparado para atingir o alvo, mas usando a menor quantidade de energia, é o mesmo que o ângulo da parte (c). (Use o fato de que a energia necessária para disparar o projétil é proporcional ao quadrado da velocidade inicial, assim, minimizar a energia equivale a minimizar a velocidade inicial.)

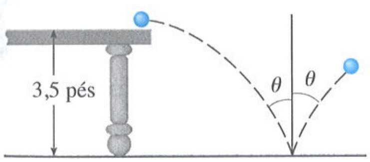


FIGURA PARA O PROBLEMA 5

5. Uma bola rola de uma mesa com uma velocidade escalar de 0,5 m/s. A mesa tem 1,2 m de altura.

(a) Determine o ponto no qual a bola atinge o solo e encontre sua velocidade escalar no instante do impacto.

(b) Encontre o ângulo θ entre a trajetória da bola e a reta vertical que passa pelo ponto de impacto (veja a figura).

(c) Suponha que a bola repique no solo no mesmo ângulo com o qual ela o atinge, mas que perca 20% de sua velocidade escalar em virtude da energia absorvida no impacto. Onde a bola atinge o chão no segundo repique?

6. Determine a curvatura da curva com equações paramétricas

$$x = \int_0^t \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta \qquad y = \int_0^t \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta$$

7. Se um projétil é disparado com ângulo de elevação α e velocidade escalar inicial v, as equações paramétricas de sua trajetória são

$$x = (v\cos\alpha)t \qquad y = (v\operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

(Veja o Exemplo 5 na Seção 13.4.) Sabemos que o alcance (distância horizontal percorrida) é maximizado quando $\alpha = 45°$. Qual valor de α maximiza a distância total percorrida pelo projétil? (Dê sua resposta com precisão de um grau.)

8. Um cabo tem raio r e comprimento L e está enrolado, sem sobreposição, em um carretel de raio R. Qual é o menor comprimento ao longo do carretel que é coberto pelo cabo?