**EQUAÇÃO DA ESFERA** Uma equação da esfera de centro $C(h, k, l)$ e raio $r$ é

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

Em particular, se o centro é a origem $O$, a equação da esfera é

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

**EXEMPLO 5** Mostre que $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ é a equação de uma esfera e encontre seu centro e raio.

SOLUÇÃO Podemos reescrever a equação dada na forma da equação de uma esfera se completarmos os quadrados:

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 2z + 1) = -6 + 4 + 9 + 1$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 8$$

Comparando essa equação com a forma-padrão, vemos que esta é a equação de uma esfera com centro $(-2, 3, -1)$ e raio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. □

**EXEMPLO 6** Que região de $\mathbb{R}^3$ é representada pelas seguintes inequações?

$$1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4 \qquad z \leqslant 0$$

SOLUÇÃO As inequações

$$1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$$

podem ser reescritas como

$$1 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant 2$$

e, portanto, representam os pontos $(x, y, z)$ cuja distância à origem é pelo menos 1 e, no máximo, 2. Mas nos foi dado também que $z \leqslant 0$, estando os pontos, portanto, abaixo do plano $xy$. Assim, a inequação dada representa a região que está entre as (ou nas) esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e sob (ou sobre) o plano $xy$. O esboço da região está apresentado na Figura 11. □

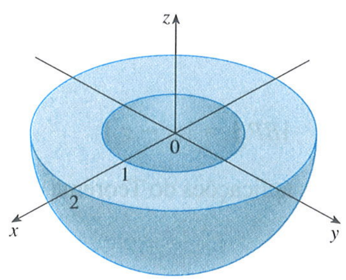



**FIGURA 11**

## 12.1 EXERCÍCIOS

1. Suponha que, a partir da origem, você tenha percorrido uma distância de quatro unidades ao longo do eixo $x$ no sentido positivo e então uma distância de três unidades para baixo. Quais as coordenadas de sua posição atual?

2. Esboce os pontos $(0, 5, 2)$, $(4, 0, -1)$, $(2, 4, 6)$ e $(1, -1, 2)$ em um mesmo conjunto de eixos coordenados.

3. Qual dos pontos está mais próximo do plano $xz$: $P(6, 2, 3)$, $Q(-5, -1, 4)$ ou $R(0, 3, 8)$? Qual ponto pertence ao plano $yz$?

4. Quais são as projeções do ponto $(2, 3, 5)$ nos planos $xy$, $yz$ e $xz$? Desenhe uma caixa retangular que tenha vértices opostos na origem e em $(2, 3, 5)$ e suas faces paralelas aos planos coordenados. Nomeie todos os vértices da caixa. Determine o comprimento da diagonal dessa caixa.

5. Descreva e esboce no $\mathbb{R}^3$ a superfície representada pela equação $x + y = 2$.

6. (a) O que a equação $x = 4$ representa em $\mathbb{R}^2$? E em $\mathbb{R}^3$? Ilustre com esboços.
   (b) O que a equação $y = 3$ representa em $\mathbb{R}^3$? O que $z = 5$ representa? O que o par de equações $y = 3$ e $z = 5$ representa? Em outras palavras, descreva o conjunto de pontos $(x, y, z)$ tais que $y = 3$ e $z = 5$. Ilustre com um esboço.

**7-8** Encontre os comprimentos dos lados do triângulo $PQR$. Ele é um triângulo retângulo? É isósceles?

7. $P(3, -2, -3)$, $Q(7, 0, 1)$, $R(1, 2, 1)$

8. $P(2, -1, 0)$, $Q(4, 1, 1)$, $R(4, -5, 4)$

9. Determine se os pontos estão em uma mesma reta.
   (a) $A(2, 4, 2)$, $B(3, 7, -2)$, $C(1, 3, 3)$
   (b) $D(0, -5, 5)$, $E(1, -2, 4)$, $F(3, 4, 2)$

10. Determine a distância entre $(3, 7, -5)$ e cada um dos seguintes.
   (a) Plano $xy$ (b) Plano $yz$

(c) Plano $xz$ (d) Eixo $x$

(e) Eixo $y$ (f) Eixo $z$

**11.** Determine uma equação da esfera com centro em $(0, 1, -1)$ e raio 4. Qual é a intersecção dessa esfera com o plano $yz$?

**12.** Determine uma equação da esfera com centro em $(2, -6, 4)$ e raio 5. Descreva sua intersecção com cada um dos planos coordenados.

**13.** Determine uma equação da esfera que passa pelo ponto $(4, 3, -1)$ e tem centro em $(3, 8, 1)$.

**14.** Determine uma equação da esfera que passa pela origem e tem centro em $(1, 2, 3)$.

**15-18** Mostre que a equação representa uma esfera e determine seu centro e raio.

**15.** $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$

**16.** $x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y$

**17.** $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$

**18.** $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y = 1$

**19.** (a) Demonstre que o ponto médio do segmento de reta que liga $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ é

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

(b) Determine os comprimentos das medianas do triângulo com vértices em $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 0, 5)$ e $C(4, 1, 5)$.

**20.** Encontre uma equação de uma esfera que tenha um diâmetro com extremidades dadas por $(2, 1, 4)$ e $(4, 3, 10)$.

**21.** Encontre equações das esferas com centro em $(2, -3, 6)$ que toquem (a) o plano $xy$, (b) o plano $yz$ e (c) o plano $xz$.

**22.** Determine uma equação da maior esfera com centro em $(5, 4, 9)$ contida no primeiro octante.

**23-32** Descreva em palavras a região de $\mathbb{R}^3$ representada pela equação ou inequação.

**23.** $y = -4$

**24.** $x = 10$

**25.** $x > 3$

**26.** $y \geqslant 0$

**27.** $0 \leqslant z \leqslant 6$

**28.** $z^2 = 1$

**29.** $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3$

**30.** $x = z$

**31.** $x^2 + z^2 \leqslant 9$

**32.** $x^2 + y^2 + z^2 > 2z$

**33-36** Escreva inequações para descrever a região dada.

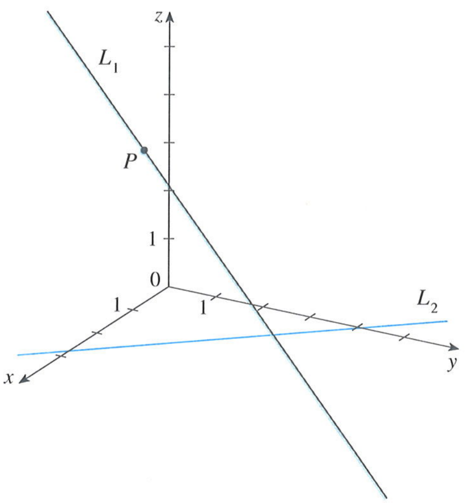
**33.** A região entre o plano $yz$ e o plano vertical $x = 5$.

**34.** O cilindro sólido que está sobre ou abaixo do plano $z = 8$ e sobre ou acima do disco no plano $xy$ com centro na origem e raio 2.

**35.** A região constituída em todos os pontos entre (mas não sobre) as esferas de raio $r$ e $R$ centradas na origem, onde $r < R$.

**36.** O hemisfério superior sólido da esfera de raio 2 centrada na origem.

**37.** A figura mostra uma reta $L_1$ no espaço e uma segunda reta $L_2$, que é a projeção de $L_1$ no plano $xy$. (Isto é, os pontos de $L_2$ estão diretamente abaixo ou acima dos pontos de $L_1$.)




(a) Determine as coordenadas do ponto $P$ da reta $L_1$.

(b) Localize no diagrama os pontos $A$, $B$ e $C$ onde a reta $L_1$ intercepta os planos $xy$, $yz$ e $xz$, respectivamente.

**38.** Considere os pontos $P$ tais que a distância de $P$ a $A(-1, 5, 3)$ seja o dobro da distância de $P$ a $B(6, 2, -2)$. Mostre que o conjunto desses pontos é uma esfera e determine seu raio e centro.

**39.** Determine uma equação para o conjunto de pontos equidistantes dos pontos $A(-1, 5, 3)$ e $B(6, 2, -2)$. Descreva o conjunto.

**40.** Determine o volume do sólido que está contido em ambas as esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 5 = 0$$

e

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$-|\mathbf{T}_1|\cos 50^\circ + |\mathbf{T}_2|\cos 32^\circ = 0$$

$$|\mathbf{T}_1|\operatorname{sen} 50^\circ + |\mathbf{T}_2|\operatorname{sen} 32^\circ = 980$$

Isolando $|\mathbf{T}_2|$ na primeira equação e substituindo na segunda, temos

$$|\mathbf{T}_1|\operatorname{sen} 50^\circ + \frac{|\mathbf{T}_1|\cos 50^\circ}{\cos 32^\circ}\operatorname{sen} 32^\circ = 980$$

Ou seja, os módulos das tensões são

$$|\mathbf{T}_1| = \frac{980}{\operatorname{sen} 50^\circ + \operatorname{tg} 32^\circ \cos 50^\circ} \approx 839 \text{ N}$$

e
$$|\mathbf{T}_2| = \frac{|\mathbf{T}_1|\cos 50^\circ}{\cos 32^\circ} \approx 636 \text{ N}$$

Substituindo em (5) e (6), obtemos os vetores tensão

$$\mathbf{T}_1 \approx -539\,\mathbf{i} + 643\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{T}_2 \approx 539\,\mathbf{i} + 337\,\mathbf{j}$$

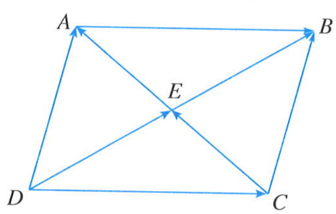
□

## 12.2 EXERCÍCIOS

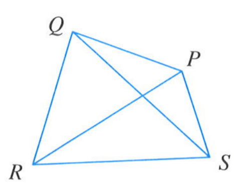
**1.** Quais das seguintes grandezas são vetoriais ou escalares? Explique.
(a) O custo de um bilhete de cinema
(b) A correnteza em um rio
(c) A trajetória inicial do voo entre Houston e Dallas
(d) A população mundial

**2.** Qual a relação existente entre o ponto (4, 7) e o vetor $\langle 4, 7\rangle$? Faça um esboço ilustrativo.

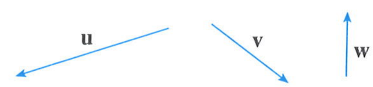
**3.** Indique os vetores iguais no paralelogramo mostrado.



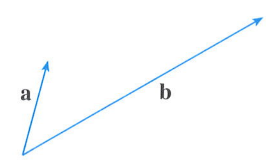

**4.** Escreva cada combinação de vetores como um único vetor.
(a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ (b) $\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS}$
(c) $\overrightarrow{QS} - \overrightarrow{PS}$ (d) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ}$




**5.** Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores.
(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$
(c) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (d) $\mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{u}$




**6.** Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores.
(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$
(c) $2\mathbf{a}$ (d) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$
(e) $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (f) $\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$




**7-12** Determine o vetor $\mathbf{a}$ com representação dada pelo segmento de reta orientado $\overrightarrow{AB}$. Desenhe $\overrightarrow{AB}$ e o equivalente com início na origem.

**7.** $A(2, 3)$, $B(-2, 1)$ **8.** $A(-2, -2)$, $B(5, 3)$
**9.** $A(-1, 3)$, $B(2, 2)$ **10.** $A(2, 1)$, $B(0, 6)$
**11.** $A(0, 3, 1)$, $B(2, 3, -1)$ **12.** $A(4, 0, -2)$, $B(4, 2, 1)$

**13-16** Determine a soma dos vetores dados e ilustre geometricamente.

**13.** $\langle -1, 4\rangle$, $\langle 6, -2\rangle$ **14.** $\langle -2, -1\rangle$, $\langle 5, 7\rangle$
**15.** $\langle 0, 1, 2\rangle$, $\langle 0, 0, -3\rangle$ **16.** $\langle -1, 0, 2\rangle$, $\langle 0, 4, 0\rangle$

**17-20** Determine $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $|\mathbf{a}|$ e $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

**17.** $\mathbf{a} = \langle 5, -12\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, -6\rangle$
**18.** $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
**19.** $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
**20.** $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

**21-23** Determine o vetor unitário com mesma direção e sentido que o vetor dado.

**21.** $-3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

**22.** $\langle -4, 2, 4 \rangle$

**23.** $8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

**24.** Ache um vetor que possui a mesma direção e o mesmo sentido que $\langle -2, 4, 2 \rangle$, mas tem comprimento 6.

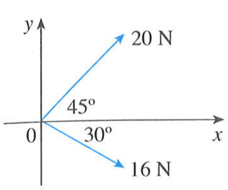
**25.** Se $\mathbf{v}$ está no primeiro quadrante e faz um ângulo de $\pi/3$ com o eixo $x$ positivo e $|\mathbf{v}| = 4$, ache as componentes de $\mathbf{v}$.

**26.** Se uma criança puxa um trenó na neve com força de 50 N a um ângulo de 38° com relação à horizontal, ache as componentes horizontal e vertical da força.

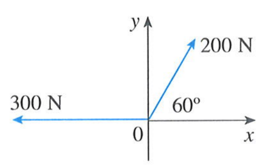
**27.** Um *quarterback* joga uma bola de futebol americano com ângulo de elevação 40° e velocidade escalar 20 m/s. Encontre as componentes horizontal e vertical do vetor velocidade.

**28-29** Encontre o módulo da força resultante e o ângulo que ela faz com o eixo $x$ positivo.

**28.**



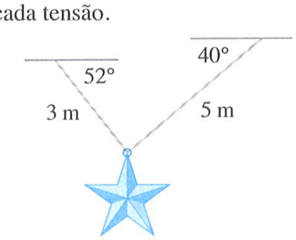

**29.**




**30.** Velocidades têm módulo, direção e sentido, sendo portanto vetores. O módulo de uma velocidade é chamado *velocidade escalar*. Suponha que esteja ventando na direção N45°W a uma velocidade de 50 km/h. (Isso significa que a direção da qual está ventando está 45° a oeste da direção norte.) Um piloto está virando seu avião na direção N60°E a uma velocidade relativa (velocidade em ar parado) de 250 km/h. O *curso verdadeiro* ou *trajetória* do avião é a direção da resultante dos vetores velocidades do avião e do vento. A *velocidade escalar em relação ao solo* do avião é o módulo da resultante. Determine o curso real e a velocidade escalar em relação ao solo do avião.

**31.** Uma mulher anda em direção ao oeste no tombadilho de um navio a 5 km/h. O navio está se movendo em direção ao norte com velocidade escalar de 35 km/h. Determine a velocidade escalar e a direção da mulher em relação à superfície da água.

**32.** Cordas de 3 m e 5 m de comprimento são atadas à decoração natalina suspensa sobre uma praça. A decoração tem massa de 5 kg. As cordas, atadas em diferentes alturas, fazem ângulos de 52° e 40° com a horizontal. Determine a tensão em cada fio e o módulo de cada tensão.




**33.** Um varal de roupas é estendido entre dois postes, 8 m distantes um do outro. O fio do varal está bastante esticado, de forma a ser considerado horizontal. Quando uma camisa molhada com massa de 0,8 kg é pendurada no meio do varal, esse ponto central é deslocado para baixo em 8 cm. Determine a tensão em cada metade do varal.

**34.** A tensão $\mathbf{T}$ em cada extremidade da corrente tem um módulo de 25 N. Qual o peso da corrente?


**35.** Encontre os vetores unitários que são paralelos à reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(2, 4)$.

**36.** (a) Encontre os vetores unitários que são paralelos à reta tangente à curva $y = 2 \operatorname{sen} x$ no ponto $(\pi/6, 1)$.
(b) Encontre os vetores unitários que são perpendiculares à reta tangente.
(c) Esboce a curva $y = 2 \operatorname{sen} x$ e os vetores nas partes (a) e (b), todos começando em $(\pi/6, 1)$.

**37.** Se $A$, $B$ e $C$ são vértices de um triângulo, determine $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

**38.** Seja $C$ o ponto no segmento de reta $AB$ que está duas vezes mais longe de $B$ do que de $A$. Se $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ e $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, mostre que $\mathbf{c} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$.

**39.** (a) Desenhe os vetores $\mathbf{a} = \langle 3, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1 \rangle$ e $\mathbf{c} = \langle 7, 1 \rangle$.
(b) Mostre, por um esboço, que existem escalares $s$ e $t$ tais que $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$.
(c) Use o esboço para estimar os valores de $s$ e $t$.
(d) Determine os valores exatos de $s$ e $t$.

**40.** Suponha que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sejam vetores não nulos, não paralelos e que $\mathbf{c}$ seja um vetor pertencente ao plano determinado por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Dê um argumento geométrico para mostrar quer $\mathbf{c}$ pode ser escrito como $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ para uma escolha conveniente de $s$ e $t$. Depois dê argumentos usando componentes.

**41.** Se $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ e $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, descreva o conjunto de todos os pontos $(x, y, z)$ tal que $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = 1$.

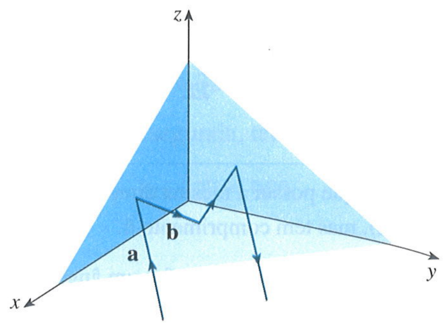
**42.** Se $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$, $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$ e $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2 \rangle$, descreva o conjunto de todos os pontos $(x, y)$ tal que $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = k$, onde $k > |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

**43.** A Figura 16 fornece uma demonstração geométrica da Propriedade 2 dos vetores. Use as componentes para dar uma demonstração algébrica desse fato no caso $n = 2$.

**44.** Demonstre a Propriedade 5 dos vetores algebricamente para $n = 3$. Use então a semelhança de triângulos para fazer uma demonstração geométrica.

**45.** Utilize vetores para demonstrar que uma reta unindo os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralela ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.

**46.** Suponha que os três planos coordenados sejam todos espelhados e que um raio de luz dado pelo vetor $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ atinja primeiro o plano $xz$, como mostrado na figura. Use o fato de os ângulos de incidência e de reflexão serem iguais para mostrar que a direção do raio refletido é dada por $\mathbf{b} = \langle a_1, -a_2, a_3 \rangle$. Deduza que, após ser refletido em todos os três espelhos perpendiculares, o raio resultante é paralelo ao raio inicial. (Cientistas norte-americanos usaram esse princípio, juntamente com um feixe de laser e um conjunto de espelhos em cantoneira na Lua, para calcular de modo preciso a distância da Terra à Lua.)




## 12.3 O PRODUTO ESCALAR

Até aqui aprendemos a somar os vetores e multiplicá-los por um escalar. A seguinte questão surge: é possível multiplicar dois vetores de modo que o valor resultante seja de alguma utilidade? Um desses produtos é o produto escalar, cuja definição vem a seguir. O outro é o produto vetorial, que será discutido na próxima seção.

**1 DEFINIÇÃO** Se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, então o **produto escalar** de **a** e **b** é o número $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Assim, para achar o produto escalar de **a** por **b** multiplicamos as componentes correspondentes e somamos. O resultado não é um vetor. É um número real, isto é, um escalar, por isso o nome **produto escalar**. O **produto escalar** também é conhecido como **produto interno**. Apesar de a definição ter sido dada para os vetores tridimensionais, o produto escalar para os vetores bidimensionais é definido de forma análoga:

$$\langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

**EXEMPLO 1**

$$\langle 2, 4 \rangle \cdot \langle 3, -1 \rangle = 2(3) + 4(-1) = 2$$

$$\langle -1, 7, 4 \rangle \cdot \langle 6, 2, -\tfrac{1}{2} \rangle = (-1)(6) + 7(2) + 4\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 6$$

$$(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 1(0) + 2(2) + (-3)(-1) = 7$$

□

O produto escalar obedece a muitas das regras que valem para o produto de números reais. Esse fato é apresentado no seguinte teorema.

**2 PROPRIEDADES DO PRODUTO ESCALAR** Se **a**, **b** e **c** são vetores em $V_3$ e $c$ é um escalar, então

**1.** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

**2.** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

**3.** $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

**4.** $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$

**5.** $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

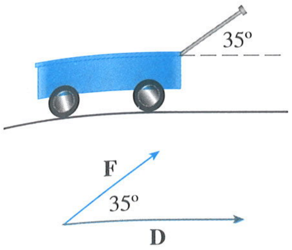



FIGURA 7

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = |\mathbf{F}||\mathbf{D}| \cos 35^\circ$$
$$= (70)(100) \cos 35^\circ \approx 5\,734 \text{ N·m} = 5\,734 \text{ J} \qquad \square$$

**EXEMPLO 8** Uma força dada pelo vetor $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ move uma partícula do ponto $P(2, 1, 0)$ para o ponto $Q(4, 6, 2)$. Determine o trabalho realizado.

SOLUÇÃO O vetor deslocamento é $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 5, 2\rangle$; portanto, utilizando a Equação 12, o trabalho realizado é

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = \langle 3, 4, 5\rangle \cdot \langle 2, 5, 2\rangle$$
$$= 6 + 20 + 10 = 36$$

Se a unidade de comprimento é o metro e a força é medida em newtons, o trabalho realizado é de 36 joules. $\square$

## 12.3 EXERCÍCIOS

**1.** Quais das seguintes expressões têm significado? Quais não fazem sentido? Explique.

(a) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ (b) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
(c) $|\mathbf{a}|(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ (d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
(e) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}$ (f) $|\mathbf{a}| \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

**2.** Determine o produto escalar de dois vetores cujas normas sejam respectivamente 6 e $\frac{1}{3}$ e tal que o ângulo entre eles seja $\pi/4$.

**3-10** Determine $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

**3.** $\mathbf{a} = \langle -2, \frac{1}{3}\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, 12\rangle$

**4.** $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -8, -3\rangle$

**5.** $\mathbf{a} = \langle 5, 0, -2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, -1, 10\rangle$

**6.** $\mathbf{a} = \langle s, 2s, 3s\rangle$, $\mathbf{b} = \langle t, -t, 5t\rangle$

**7.** $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{k}$

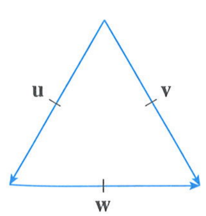
**8.** $\mathbf{a} = 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

**9.** $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 5$, e o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é $2\pi/3$.

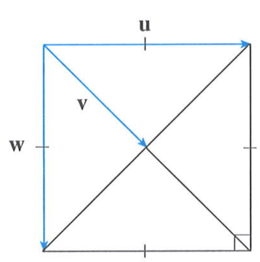
**10.** $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{6}$, e o ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é 45°.

**11-12** Se $\mathbf{u}$ é um vetor unitário, determine $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

**11.**




**12.**




**13.** (a) Mostre que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$.
(b) Mostre que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$.

**14.** Um vendedor vende $a$ hambúrgueres, $b$ cachorros-quentes e $c$ refrigerantes em um determinado dia. Ele cobra \$ 2 o hambúrguer, \$ 1,50 o cachorro-quente e \$ 1 o refrigerante. Se $\mathbf{A} = \langle a, b, c\rangle$ e $\mathbf{P} = \langle 2, 1{,}5, 1\rangle$, qual o significado do produto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$?

**15-20** Determine o ângulo entre os vetores. (Encontre inicialmente uma expressão exata e depois aproxime o valor até a precisão de um grau.)

**15.** $\mathbf{a} = \langle -8, 6\rangle$, $\mathbf{b} = \langle \sqrt{7}, 3\rangle$

**16.** $\mathbf{a} = \langle \sqrt{3}, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 5\rangle$

**17.** $\mathbf{a} = \langle 3, -1, 5\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 4, 3\rangle$

**18.** $\mathbf{a} = \langle 4, 0, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 0\rangle$

**19.** $\mathbf{a} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

**20.** $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$

**21-22** Determine, aproximando o valor até a precisão de um grau, os três ângulos do triângulo cujos vértices são dados.

**21.** $A(1, 0)$, $B(3, 6)$, $C(-1, 4)$

**22.** $D(0, 1, 1)$, $E(-2, 4, 3)$, $F(1, 2, -1)$

**23-24** Determine se os vetores dados são ortogonais, paralelos ou nenhum dos dois.

**23.** (a) $\mathbf{a} = \langle -5, 3, 7\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, -8, 2\rangle$
(b) $\mathbf{a} = \langle 4, 6\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, 2\rangle$
(c) $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$
(d) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

**24.** (a) $\mathbf{u} = \langle -3, 9, 6\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, -12, -8\rangle$
(b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$
(c) $\mathbf{u} = \langle a, b, c\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -b, a, 0\rangle$

**25.** Use vetores para decidir se o triângulo com vértices $P(1, -3, -2)$, $Q(2, 0, -4)$ e $R(6, -2, -5)$ é retângulo.

**26.** Para que valores de $b$ os vetores $\langle -6, b, 2\rangle$ e $\langle b, b^2, b\rangle$ são ortogonais?

**27.** Determine um vetor unitário ortogonal a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ a e $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

**28.** Ache dois vetores unitários que façam um ângulo de 60° com $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$.

**29-33** Determine os cossenos diretores e os ângulos diretores do vetor. (Forneça o ângulo diretor com precisão de um grau.)

**29.** $\langle 3, 4, 5 \rangle$

**30.** $\langle 1, -2, -1 \rangle$

**31.** $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

**32.** $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

**33.** $\langle c, c, c \rangle$, onde $c > 0$

**34.** Se um vetor tem ângulos diretores $\alpha = \pi/4$ e $\beta = \pi/3$, determine o terceiro ângulo diretor $\gamma$.

**35-40** Determine o vetor projeção e a projeção escalar de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$.

**35.** $\mathbf{a} = \langle 3, -4 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 5, 0 \rangle$

**36.** $\mathbf{a} = \langle 1, 2 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle -4, 1 \rangle$

**37.** $\mathbf{a} = \langle 3, 6, -2 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 1, 2, 3 \rangle$

**38.** $\mathbf{a} = \langle -2, 3, -6 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 5, -1, 4 \rangle$

**39.** $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

**40.** $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

**41.** Mostre que o vetor $\text{perp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \mathbf{b} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$ é ortogonal a $\mathbf{a}$. (Esse vetor é chamado **projeção ortogonal** de $\mathbf{b}$.)

**42.** Para os vetores do Exercício 36, determine $\text{perp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$ e ilustre esboçando os vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$ e $\text{perp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$.

**43.** Se $\mathbf{a} = \langle 3, 0, -1 \rangle$, determine um vetor $\mathbf{b}$ tal que $\text{comp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = 2$.

**44.** Suponha que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sejam vetores não nulos.
(a) Sob quais circunstâncias $\text{comp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \text{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}$?
(b) Sob quais circunstâncias $\text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \text{proj}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}$?

**45.** Encontre o trabalho feito por uma força $\mathbf{F} = 8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ que move um objeto do ponto (0, 10, 8) para o ponto (6, 12, 20) ao longo de uma reta. A distância é medida em metros e a força em newtons.

**46.** Um caminhão-guincho puxa um carro quebrado por uma estrada. A corrente faz um ângulo de 30° com a estrada e a tensão na corrente é 1 500 N. Quanto trabalho é feito pelo caminhão ao puxar o carro 1 km?

**47.** Uma mulher exerce uma força horizontal de 140 N em um engradado quando ela o empurra para subir uma rampa de 4 m de comprimento e com um ângulo de inclinação de 20° acima da horizontal. Calcule o trabalho realizado sobre a caixa.

**48.** Encontre o trabalho feito por uma força de 100 N agindo na direção N50°W ao mover um objeto 5 metros para oeste.

**49.** Use projeção escalar para mostrar que a distância de um ponto $P_1(x_1, y_1)$ à reta $ax + by + c = 0$ é

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

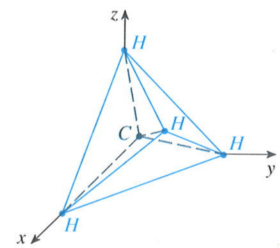
Use essa fórmula para determinar a distância do ponto $(-2, 3)$ à reta $3x - 4y + 5 = 0$.

**50.** Se $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, mostre que a equação vetorial $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{b}) = 0$ representa uma esfera e determina seu centro e raio.

**51.** Calcule o ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas.

**52.** Calcule o ângulo entre a diagonal de um cubo e a diagonal de uma de suas faces.

**53.** Uma molécula de metano, $CH_4$, é estruturada com os quatro átomos de hidrogênio nos vértices de um tetraedro regular e o carbono no centro. O *ângulo de vínculo* é o ângulo formado pela ligação H–C–H; é o ângulo entre as retas que ligam o carbono a dois átomos de hidrogênio. Mostre que esse ângulo de vínculo é de aproximadamente 109,5°. [*Sugestão*: Tome os vértices do tetraedro em (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) e (1, 1, 1), como exposto na figura. Mostre então que o centro é $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.]




**54.** Se $\mathbf{c} = |\mathbf{a}|\mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{a}$, onde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ são vetores não nulos, mostre que $\mathbf{c}$ é a bissetriz do ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

**55.** Demonstre as Propriedades 2, 4 e 5 do produto escalar (Teorema 2).

**56.** Suponha que todos os lados de um quadrilátero tenham o mesmo comprimento e que os lados opostos sejam paralelos. Use vetores para demonstrar que as diagonais são perpendiculares.

**57.** Utilize o Teorema 3 para demonstrar a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

**58.** A *Desigualdade Triangular* para vetores é

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

(a) Dê uma interpretação geométrica para a Desigualdade Triangular.
(b) Use a Desigualdade de Cauchy-Schwarz do Exercício 57 para demonstrar a Desigualdade Triangular. [*Sugestão*: Use o fato de que $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ e utilize a Propriedade 3 do produto escalar.]

**59.** A Lei do Paralelogramo afirma que

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2\,|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2$$

(a) Dê uma interpretação geométrica da Lei do Paralelogramo.
(b) Demonstre a Lei do Paralelogramo. (Veja a sugestão do Exercício 58.)

**60.** Mostre que se $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ forem ortogonais, então os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ devem ter o mesmo comprimento.

e mede a tendência de um corpo rodar em torno da origem. A direção do vetor torque indica o eixo de rotação. De acordo com o Teorema 6, o módulo do torque é

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \text{ sen } \theta$$

onde $\theta$ é o ângulo entre o vetor posição e o vetor força. Observe que a única componente da força $\mathbf{F}$ que pode causar a rotação do objeto é a perpendicular a $\mathbf{r}$, ou seja, $|\mathbf{F}|$ sen $\theta$. O módulo do torque é igual à área do paralelogramo determinado por $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$.

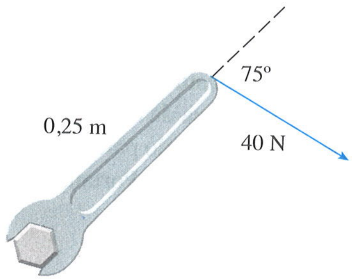



**FIGURA 5**

**EXEMPLO 6** Um parafuso é apertado aplicando-se uma força de 40 N a uma chave de boca de 0,25 m, como mostrado na Figura 5. Determine o módulo do torque em relação ao centro do parafuso.

SOLUÇÃO O módulo do vetor torque é

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\tau}| &= |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \text{ sen } 75° = (0{,}25)(40) \text{ sen } 75° \\ &= 10 \text{ sen } 75° \approx 9{,}66 \text{ N·m} \end{aligned}$$

Se o parafuso tem a rosca para a direita, o vetor torque é

$$\boldsymbol{\tau} = |\boldsymbol{\tau}|\mathbf{n} \approx 9{,}66\mathbf{n}$$

onde $\mathbf{n}$ é um vetor unitário com direção perpendicular à página e sentido para dentro do papel. □

## 12.4 EXERCÍCIOS

**1-7** Determine o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e verifique que ele é ortogonal a $\mathbf{a}$ e a $\mathbf{b}$.

**1.** $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 3, 1 \rangle$

**2.** $\mathbf{a} = \langle 5, 1, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 0, 2 \rangle$

**3.** $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

**4.** $\mathbf{a} = \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

**5.** $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

**6.** $\mathbf{a} = \mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$

**7.** $\mathbf{a} = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$

**8.** Se $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, determine $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Esboce $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ como vetores com início na origem.

**9-12** Encontre o vetor, não com determinantes, mas usando propriedades do produto vetorial.

**9.** $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{k}$

**10.** $\mathbf{k} \times (\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$

**11.** $(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times (\mathbf{k} - \mathbf{i})$

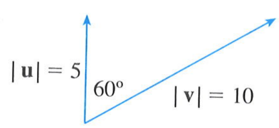
**12.** $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} - \mathbf{j})$

**13.** Diga se cada expressão a seguir tem sentido. Se não, explique por quê. Se tiver, diga se é um vetor ou um escalar.

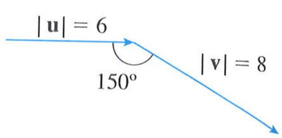
(a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
(c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(d) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
(e) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$
(f) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$

**14-15** Calcule $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ e determine se $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tem o sentido de entrar ou sair da página.

**14.**



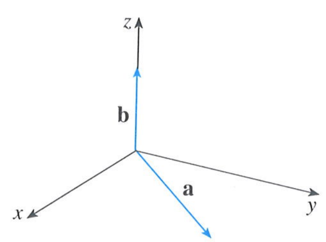

**15.**




**16.** A figura mostra um vetor $\mathbf{a}$ pertencente ao plano $xy$ e um vetor $\mathbf{b}$ na direção de $\mathbf{k}$. Seus módulos são $|\mathbf{a}| = 3$ e $|\mathbf{b}| = 2$.

(a) Calcule $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

(b) Utilize a regra da mão direita para decidir se as componentes de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ são positivas, negativas ou nulas.




**17.** Se $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 1 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle 0, 1, 3 \rangle$, calcule $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

**18.** Se $\mathbf{a} = \langle 3, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 1, 0 \rangle$ e $\mathbf{c} = \langle 0, 0, -4 \rangle$, mostre que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

**19.** Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais tanto a $\langle 1, -1, 1 \rangle$ quanto a $\langle 0, 4, 4 \rangle$.

**20.** Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais tanto a $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ quanto a $2\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

**21.** Mostre que $\mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} = \mathbf{a} \times \mathbf{0}$ para qualquer vetor $\mathbf{a}$ em $V_3$.

**22.** Mostre que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$ para todos os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em $V_3$.

**23.** Demonstre a Propriedade 1 do Teorema 8.

**24.** Demonstre a Propriedade 2 do Teorema 8.

**25.** Demonstre a Propriedade 3 do Teorema 8.

**26.** Demonstre a Propriedade 4 do Teorema 8.

**27.** Determine a área do paralelogramo com vértices em $A(-2,1)$, $B(0,4)$, $C(4,2)$ e $D(2,-1)$.

**28.** Determine a área do paralelogramo com vértices em $K(1,2,3)$, $L(1,3,6)$, $M(3,8,6)$ e $N(3,7,3)$.

**29-32** (a) Encontre um vetor não nulo ortogonal ao plano que passa pelos pontos $P$, $Q$ e $R$ e (b) calcule a área do triângulo $PQR$.

**29.** $P(1,0,0)$, $\quad Q(0,2,0)$, $\quad R(0,0,3)$

**30.** $P(2,1,5)$, $\quad Q(-1,3,4)$, $\quad R(3,0,6)$

**31.** $P(0,-2,0)$, $\quad Q(4,1,-2)$, $\quad R(5,3,1)$

**32.** $P(-1,3,1)$, $\quad Q(0,5,2)$, $\quad R(4,3,-1)$

**33-34** Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores **a**, **b** e **c**.

**33.** $\mathbf{a} = \langle 6,3,-1\rangle$, $\quad \mathbf{b} = \langle 0,1,2\rangle$, $\quad \mathbf{c} = \langle 4,-2,5\rangle$

**34.** $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\quad \mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

**35-36** Calcule o volume do paralelepípedo com lados adjacentes $PQ$, $PR$ e $PS$.

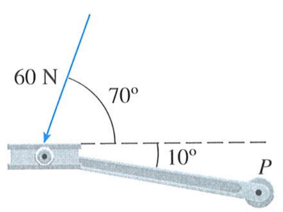
**35.** $P(2,0,-1)$, $\quad Q(4,1,0)$, $\quad R(3,-1,1)$, $\quad S(2,-2,2)$

**36.** $P(3,0,1)$, $\quad Q(-1,2,5)$, $\quad R(5,1,-1)$, $\quad S(0,4,2)$

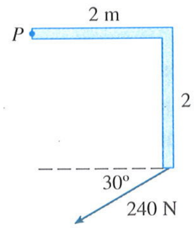
**37.** Utilize o produto misto para verificar se os vetores
$\mathbf{u} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{w} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
são coplanares.

**38.** Use o produto misto para determinar se os pontos $A(1,3,2)$, $B(3,-1,6)$, $C(5,2,0)$ e $D(3,6,-4)$ pertencem ao mesmo plano.

**39.** O pedal de uma bicicleta é empurrado por um pé com força de 60 N, como mostrado. A haste do pedal tem 18 cm de comprimento. Determine o módulo do torque em relação a $P$.




**40.** Determine a intensidade do torque em relação a $P$ se for aplicada uma força de 240 N, como mostrado.




**41.** Uma chave de boca com 30 cm de comprimento posicionada ao longo do eixo $y$ aperta um parafuso colocado na origem. Uma força é aplicada no final do cabo da chave com direção dada por $\langle 0, 3, -4\rangle$. Determine o módulo da força necessária para que o torque resultante no parafuso seja de 100 N·m.

**42.** Seja $\mathbf{v} = 5\mathbf{j}$ e seja **u** um vetor com comprimento 3 com início na origem e que gira no plano $xy$. Determine o máximo e o mínimo valor possível para $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Qual a direção e o sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$?

**43.** (a) Seja $P$ um ponto não pertencente à reta $L$ que passa pelos pontos $Q$ e $R$. Mostre que a distância $d$ do ponto $P$ até a reta $L$ é

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

onde $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$ e $\mathbf{b} = \overrightarrow{QP}$.

(b) Utilize a fórmula da parte (a) do exercício para determinar a distância do ponto $P(1,1,1)$ à reta que passa por $Q(0,6,8)$ e $R(-1,4,7)$.

**44.** (a) Seja $P$ um ponto não pertencente ao plano que passa pelos pontos $Q$, $R$ e $S$. Mostre que a distância $d$ de $P$ ao plano é

$$d = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

onde $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{QS}$ e $\mathbf{c} = \overrightarrow{QP}$.

(b) Utilize a fórmula dada na parte (a) para calcular a distância de $P(2,1,4)$ ao plano definido pelos pontos $Q(1,0,0)$, $R(0,2,0)$ e $S(0,0,3)$.

**45.** Demonstre que $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

**46.** Demonstre a parte 6 do Teorema 8, ou seja,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

**47.** Utilize o Exercício 46 para demonstrar que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

**48.** Demonstre que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$$

**49.** Suponha que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.
(a) Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, é verdade que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?
(b) Se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, é verdade que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?
(c) Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ e $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, é verdade que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

**50.** Se $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são vetores não coplanares, sejam

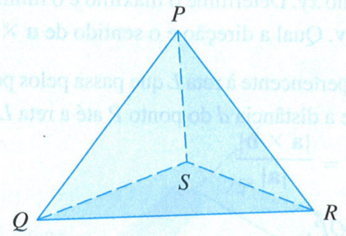
$$\mathbf{k}_1 = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)} \qquad \mathbf{k}_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$$

(Esses vetores aparecem no estudo de cristalografia. Vetores da forma $n_1\mathbf{v}_1 + n_2\mathbf{v}_2 + n_3\mathbf{v}_3$, onde cada $n_i$ é um inteiro, formam um *reticulado* para o cristal. Vetores escritos de modo semelhante em termos de $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ e $\mathbf{k}_3$ formam o *reticulado recíproco*.)
(a) Mostre que $\mathbf{k}_i$ é perpendicular a $\mathbf{v}_j$ se $i \neq j$.
(b) Mostre que $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$ para $i = 1, 2, 3$.
(c) Mostre que $\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3) = \dfrac{1}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$.

PROJETO DE DESCOBERTA

## A GEOMETRIA DO TETRAEDRO




Um tetraedro é um sólido com quatro vértices, $P$, $Q$, $R$ e $S$, e quatro faces triangulares:

1. Sejam $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ vetores de comprimentos iguais à área das faces opostas aos vértices $P$, $Q$, $R$ e $S$, respectivamente, e direções perpendiculares às respectivas faces e apontando para fora do tetraedro. Mostre que

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

2. O volume $V$ de um tetraedro é um terço da distância de um vértice à face oposta vezes a área dessa face.
   (a) Determine uma fórmula para o volume do tetraedro em termos das coordenadas de seus vértices $P$, $Q$, $R$ e $S$.
   (b) Determine o volume do tetraedro cujos vértices são $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 2, 3)$, $R(1, 1, 2)$ e $S(3, -1, 2)$.

3. Suponha que o tetraedro da figura tenha um vértice trirretangular $S$. (Isto é, os três ângulos em $S$ são ângulos retos.) Sejam $A$, $B$ e $C$ as áreas das três faces que encontram o vértice $S$ e seja $D$ a área da face oposta $PQR$. Utilizando o resultado do Problema 1 mostre que

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

(Essa é uma versão tridimensional do Teorema de Pitágoras.)

## 12.5 EQUAÇÕES DE RETAS E PLANOS

Uma reta no plano $xy$ é determinada quando um ponto e uma direção (inclinação ou coeficiente angular da reta) são dados. A equação da reta pode ser então escrita utilizando-se a forma ponto-inclinação.

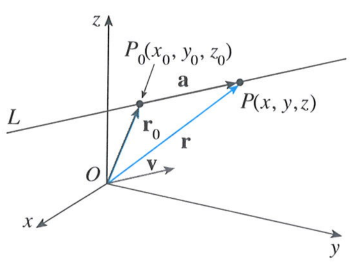



**FIGURA 1**

Da mesma maneira, uma reta $L$ no espaço tridimensional é determinada quando conhecemos um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ em $L$ e a direção de $L$. Em três dimensões a direção de uma reta é descrita de forma muito conveniente por um vetor; assim, seja $\mathbf{v}$ um vetor paralelo a $L$. Seja $P(x, y, z)$ um ponto arbitrário em $L$ e sejam $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{r}$ os vetores posição de $P_0$ e $P$ (ou seja, eles têm representantes $\overrightarrow{OP_0}$ e $\overrightarrow{OP}$). Se $\mathbf{a}$ é o vetor com representante $\overrightarrow{P_0P}$, como na Figura 1, pela Regra do Triângulo para soma de vetores temos $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$. Mas, como $\mathbf{a}$ e $\mathbf{v}$ são vetores paralelos, existe um escalar $t$ tal que $\mathbf{a} = t\mathbf{v}$. Assim

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \qquad (1)$$

que é a **equação vetorial** de $L$. Cada valor do **parâmetro** $t$ fornece um vetor posição $\mathbf{r}$ de um ponto de $L$. Em outras palavras, à medida que $t$ varia, a reta é traçada pela ponta do vetor $\mathbf{r}$. Como a Figura 2 indica, valores positivos de $t$ correspondem a pontos de $L$ pertencentes a um lado em relação a $P_0$, ao passo que valores negativos de $t$ referem-se a pontos pertencentes ao outro lado de $P_0$.

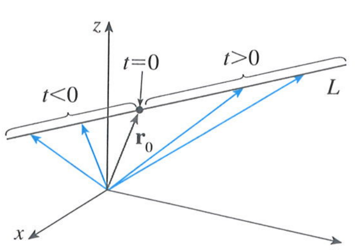



**FIGURA 2**

Se o vetor $\mathbf{v}$ que fornece a direção da reta $L$ é escrito sob a forma de componentes $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$, temos que $t\mathbf{v} = \langle ta, tb, tc \rangle$. Podemos também escrever $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ e $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, e assim a equação vetorial (1) se torna

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle$$

Dois vetores iguais têm as componentes correspondentes iguais. Assim, temos três equações escalares:

Pela Fórmula 9 essa distância é

$$D = \frac{|13(1) - 6(-2) - 5(4) + 3|}{\sqrt{13^2 + (-6)^2 + (-5)^2}} = \frac{8}{\sqrt{230}} \approx 0{,}53 \qquad \square$$

## 12.5 EXERCÍCIOS

1. Determine se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.
   (a) Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas.
   (b) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas.
   (c) Dois planos paralelos a um terceiro são paralelos.
   (d) Dois planos perpendiculares a um terceiro são paralelos.
   (e) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.
   (f) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.
   (g) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos.
   (h) Dois planos perpendiculares a uma reta são paralelos.
   (i) Dois planos ou se interceptam ou são paralelos.
   (j) Duas retas ou se interceptam ou são paralelas.
   (k) Um plano e uma reta ou se interceptam ou são paralelos.

**2-5** Determine uma equação vetorial e equações paramétricas para a reta.

2. A reta que passa pelo ponto $(1, 0, -3)$ e é paralela ao vetor $2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

3. A reta que passa pelo ponto $(-2, 4, 10)$ e é paralela ao vetor $\langle 3, 1, -8 \rangle$

4. A reta que passa pelo ponto $(0, 14, -10)$ e é paralela à reta $x = -1 + 2t$, $y = 6 - 3t$, $z = 3 + 9t$

5. A reta que passa pelo ponto $(1, 0, 6)$ e é perpendicular ao plano $x + 3y + z = 5$

**6-12** Determine as equações paramétricas e as equações simétricas para a reta.

6. Reta que passa pela origem e pelo ponto $(1, 2, 3)$

7. Reta que passa pelos pontos $(1, 3, 2)$ e $(-4, 3, 0)$

8. Reta que passa pelos pontos $(6, 1, -3)$ e $(2, 4, 5)$

9. Reta que passa pelos pontos $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ e $(2, 1, -3)$

10. Reta que passa por $(2, 1, 0)$ e é perpendicular à reta $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{j} + \mathbf{k}$

11. Reta que passa por $(1, -1, 1)$ e é paralela à reta $x + 2 = \frac{1}{2}y = z - 3$

12. Reta que é a intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$

13. A reta que passa pelos pontos $(-4, -6, 1)$ e $(-2, 0\ -3)$ é paralela à reta que passa pelos pontos $(10, 18, 4)$ e $(5, 3, 14)$?

14. A reta que passa pelos pontos $(4, 1, -1)$ e $(2, 5, 3)$ é perpendicular à reta que passa pelos pontos $(-3, 2, 0)$ e $(5, 1, 4)$?

15. (a) Determine as equações simétricas da reta que passa pelo ponto $(1, -5, 6)$ e é paralela ao vetor $\langle -1, 2, -3 \rangle$.
    (b) Determine os pontos nos quais a reta da parte (a) intercepta os planos coordenados.

16. (a) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(2, 4, 6)$ e que é perpendicular ao plano $x - y + 3z = 7$.
    (b) Em que pontos essa reta intercepta os planos coordenados?

17. Ache a equação vetorial para o segmento de reta de $(2, -1, 4)$ a $(4, 6, 1)$.

18. Ache as equações paramétricas para o segmento de reta de $(10, 3, 1)$ a $(5, 6, -3)$.

**19-22** Determine se as retas $L_1$ e $L_2$ são paralelas, reversas ou concorrentes. Se forem concorrentes, determine seu ponto de intersecção.

19. $L_1$: $x = -6t$, $y = 1 + 9t$, $z = -3t$
    $L_2$: $x = 1 + 2s$, $y = 4 - 3s$, $z = s$

20. $L_1$: $x = 1 + 2t$, $y = 3t$, $z = 2 - t$
    $L_2$: $x = -1 + s$, $y = 4 + s$, $z = 1 + 3s$

21. $L_1$: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$

    $L_2$: $\dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-1}{2}$

22. $L_1$: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$

    $L_2$: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-6}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$

**23-38** Determine a equação do plano.

23. O plano que passa pelo ponto $(6, 3, 2)$ e é perpendicular ao vetor $\langle -2, 1, 5 \rangle$

24. O plano que passa pelo ponto $(4, 0, -3)$ e cujo vetor normal é $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

25. O plano que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ e cujo vetor normal é $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

26. O plano que passa pelo ponto $(-2, 8, 10)$ e é perpendicular à reta $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 4 - 3t$

27. O plano que passa pela origem e é paralelo ao plano $2x - y + 3z = 1$

28. O plano que passa pelo ponto $(-1, 6, -5)$ e é paralelo ao plano $x + y + z + 2 = 0$

**29.** O plano que passa pelo ponto $(4, -2, 3)$ e é paralelo ao plano $3x - 7z = 12$

**30.** O plano que contém a reta $x = 3 + 2t$, $y = t$, $z = 8 - t$ e é paralelo ao plano $2x + 4y + 8z = 17$

**31.** O plano que passa pelos pontos $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$

**32.** O plano que passa pela origem e pelos pontos $(2, -4, 6)$ e $(5, 1, 3)$

**33.** O plano que passa pelos pontos $(3, -1, 2)$, $(8, 2, 4)$ e $(-1, -2, -3)$

**34.** O plano que passa pelo ponto $(1, 2, 3)$ e contém a reta $x = 3t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$

**35.** O plano que passa pelo ponto $(6, 0, -2)$ e contém a reta $x = 4 - 2t$, $y = 3 + 5t$, $z = 7 + 4t$

**36.** O plano que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ e contém a reta com equações simétricas $x = 2y = 3z$

**37.** O plano que passa pelo ponto $(-1, 2, 1)$ e contém a reta intersecção dos planos $x + y - z = 2$ e $2x - y + 3z = 1$

**38.** O plano que passa pela reta intersecção dos planos $x - z = 1$ e $y + 2z = 3$ e é perpendicular ao plano $x + y - 2z = 1$

**39-42** Use as intersecções com os eixos coordenados como uma ajuda para esboçar o plano.

**39.** $2x + 5y + z = 10$

**40.** $3x + y + 2z = 6$

**41.** $6x - 3y + 4z = 6$

**42.** $6x + 5y - 3z = 15$

**43-45** Determine o ponto no qual a reta intercepta o plano dado.

**43.** $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 3t$; $x + y + z = 1$

**44.** $x = 5$, $y = 4 - t$, $z = 2t$; $2x - y + z = 5$

**45.** $x = y - 1 = 2z$; $4x - y + 3z = 8$

**46.** Onde a reta que passa pelos pontos $(1, 0, 1)$ e $(4, -2, 2)$ intercepta o plano $x + y + z = 6$?

**47.** Determine as coordenadas do vetor diretor da reta intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$.

**48.** Determine o cosseno do ângulo entre os planos $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$.

**49-54** Determine se os planos são paralelos, perpendiculares ou nenhum dos dois. No caso de nenhum dos dois, calcule o ângulo entre eles.

**49.** $x + 4y - 3z = 1$, $\quad -3x + 6y + 7z = 0$

**50.** $2z = 4y - x$, $\quad 3x - 12y + 6z = 1$

**51.** $x + y + z = 1$, $\quad x - y + z = 1$

**52.** $2x - 3y + 4z = 5$, $\quad x + 6y + 4z = 3$

**53.** $x = 4y - 2z$, $\quad 8y = 1 + 2x + 4z$

**54.** $x + 2y + 2z = 1$, $\quad 2x - y + 2z = 1$

**55-56** (a) Determine as equações simétricas da reta intersecção dos planos e (b) determine o ângulo entre os planos.

**55.** $x + y + z = 1$, $\quad x + 2y + 2z = 1$

**56.** $3x - 2y + z = 1$, $\quad 2x + y - 3z = 3$

**57-58** Determine as equações paramétricas da reta intersecção dos planos.

**57.** $5x - 2y - 2z = 1$, $\quad 4x + y + z = 6$

**58.** $z = 2x - y - 5$, $\quad z = 4x + 3y - 5$

**59.** Determine a equação do plano constituído de todos os pontos que são equidistantes dos pontos $(1, 0, -2)$ e $(3, 4, 0)$.

**60.** Determine a equação do plano constituído de todos os pontos que são equidistantes dos pontos $(2, 5, 5)$ e $(-6, 3, 1)$.

**61.** Determine a equação do plano que intercepta o eixo $x$ em $a$, o eixo $y$ em $b$ e o eixo $z$ em $c$.

**62.** (a) Determine o ponto dado pela intersecção das retas:
$$\mathbf{r} = \langle 1, 1, 0\rangle + t\langle 1, -1, 2\rangle$$
$$\mathbf{r} = \langle 2, 0, 2\rangle + s\langle 1, 1, 0\rangle$$
(b) Determine a equação do plano que contém essas retas.

**63.** Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(0, 1, 2)$, é paralela ao plano $x + y + z = 2$ e perpendicular à reta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$.

**64.** Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(0, 1, 2)$, é perpendicular à reta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$, e intercepta essa reta.

**65.** Quais dos quatro planos seguintes são paralelos? Existem dois coincidentes?
$$P_1: 4x - 2y + 6z = 3 \qquad P_2: 4x - 2y - 2z = 6$$
$$P_3: -6x + 3y - 9z = 5 \qquad P_4: z = 2x - y - 3$$

**66.** Quais das quatro retas seguintes são paralelas? Existem duas coincidentes?
$$L_1: x = 1 + t, \quad y = t, \quad z = 2 - 5t$$
$$L_2: x + 1 = y - 2 = 1 - z$$
$$L_3: x = 1 + t, \quad y = 4 + t, \quad z = 1 - t$$
$$L_4: \mathbf{r} = \langle 2, 1, -3\rangle + t\langle 2, 2, -10\rangle$$

**67-68** Utilize a fórmula que aparece no Exercício 43 da Seção 12.4 para determinar a distância do ponto à reta dada.

**67.** $(4, 1, -2)$; $\quad x = 1 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = 4 - 3t$

**68.** $(0, 1, 3)$; $\quad x = 2t$, $y = 6 - 2t$, $z = 3 + t$

**69-70** Determine a distância do ponto ao plano dado.

**69.** $(1, -2, 4)$, $\quad 3x + 2y + 6z = 5$

**70.** $(-6, 3, 5)$, $\quad x - 2y - 4z = 8$

**71-72** Determine a distância entre os planos paralelos dados.

**71.** $2x - 3y + z = 4$, $\quad 4x - 6y + 2z = 3$

**72.** $6z = 4y - 2x, \qquad 9z = 1 - 3x + 6y$

**73.** Mostre que a distância entre os planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ e $ax + by + cz + d_2 = 0$ é

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

**74.** Determine as equações dos planos que são paralelos ao plano $x + 2y - 2z = 1$ e que distam duas unidades dele.

**75.** Mostre que as retas com equações simétricas $x = y = z$ e $x + 1 = y/2 = z/3$ são reversas e determine a distância entre elas.

**76.** Determine a distância entre as retas reversas com equações paramétricas $x = 1 + t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2t$ e $x = 1 + 2s$, $y = 5 + 15s$, $z = -2 + 6s$.

**77.** Se $a$, $b$ e $c$ não são todos nulos, mostre que a equação $ax + by + cz + d = 0$ representa um plano e $\langle a, b, c\rangle$ é o vetor normal ao plano.

*Sugestão*: Suponha $a \neq 0$ e reescreva a equação na forma

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$$

**78.** Dê a interpretação geométrica de cada família de planos.

(a) $x + y + z = c$ (b) $x + y + cz = 1$

(c) $y \cos\theta + z \operatorname{sen}\theta = 1$

PROJETO DE LABORATÓRIO

## PONDO 3D EM PERSPECTIVA

Os programadores de computação gráfica encaram o mesmo desafio que os grandes pintores do passado: como representar uma cena tridimensional como uma imagem em um plano (um monitor ou uma tela). Para criar a ilusão de perspectiva, na qual os objetos próximos parecem maiores que aqueles mais distantes, os objetos tridimensionais na memória do computador são projetados em uma tela retangular a partir do ponto de visão onde o olho ou a câmera estão localizados. O volume de visão – a porção do espaço que estará visível – é a região contida nos quatro planos que passam pelo ponto de visão e por uma aresta da tela retangular. Se os objetos na cena se estendem além dos quatro planos, eles são truncados antes que os dados sejam enviados para a tela. Esses planos são, portanto, chamados *planos cortantes*.

**1.** Suponha que a tela seja representada por um retângulo no plano $yz$ com vértices $(0, \pm 400, 0)$ e $(0, \pm 400, 600)$, e a câmera esteja localizada em $(1000, 0, 0)$. Uma reta $L$ na cena passa pelos pontos $(230, -285, 102)$ e $(860, 105, 264)$. Em quais pontos $L$ será contada pelos planos cortantes?

**2.** Se o segmento de reta cortado for projetado na tela, identifique o segmento de reta resultante.

**3.** Use equações paramétricas para traçar as arestas da tela, o segmento de reta cortado e sua projeção na tela. A seguir, adicione retas que conectem o ponto de visão a cada extremidade dos segmentos cortados para verificar que a projeção está correta.

**4.** Um retângulo com vértices $(621, -147, 206)$, $(563, 31, 242)$, $(657, -111, 86)$ e $(599, 67, 122)$ é adicionado à cena. A reta $L$ intercepta esse retângulo. Para fazer o retângulo parecer opaco, um programador pode usar *linhas escondidas* as quais removem partes do objeto que estão atrás de outros objetos. Identifique a parte de $L$ que deve ser removida.

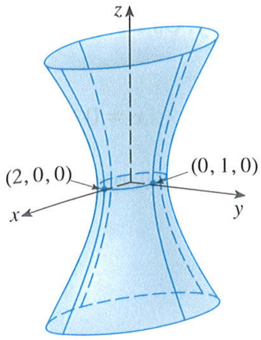


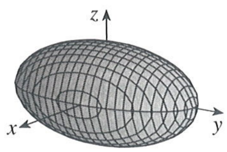
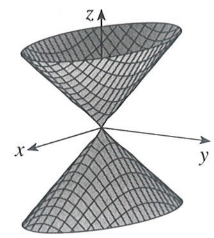
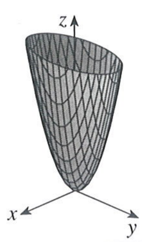
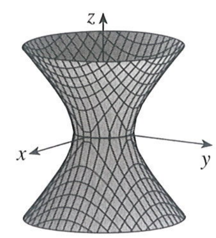
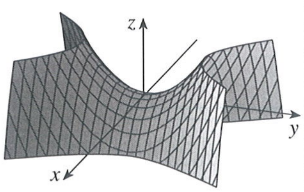
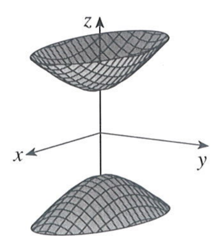

FIGURA 9

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1 \qquad y = 0 \qquad \text{e} \qquad y^2 - \frac{z^2}{4} = 1 \qquad x = 0$$

Essa superfície é chamada **hiperboloide de uma folha** e está esboçada na Figura 9. □

A ideia de usar os cortes para desenhar a superfície é empregada em programas de computadores que fazem gráficos tridimensionais. Na maioria desses programas, os cortes nos planos verticais $x = k$ e $y = k$ são desenhados para valores de $k$ igualmente espaçados, e partes do gráfico são eliminadas utilizando-se a técnica de remover linhas escondidas. A Tabela 1 mostra gráficos de computador de seis quádricas básicas na forma-padrão. Todas as superfícies são simétricas em relação ao eixo $z$. Se uma quádrica é simétrica em relação a um eixo diferente, sua equação se modifica de modo apropriado.

**TABELA 1** Gráfico de Superfícies Quádricas

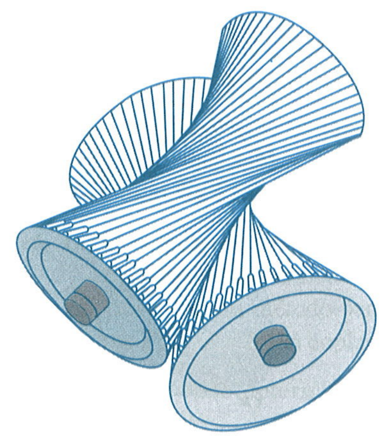
| Superfície | Equação | Superfície | Equação |
|---|---|---|---|
| Elipsoide  | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Todos os cortes são elipses. Se $a = b = c$, o elipsoide é uma esfera. | Cone  | $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Cortes horizontais são elipses. Cortes verticais nos planos $x = k$ e $y = k$ são hipérboles se $k \neq 0$, mas são um par de retas quando $k = 0$. |
| Paraboloide Elíptico  | $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Cortes horizontais são elipses. Cortes verticais são parábolas. A variável elevada à primeira potência indica o eixo do paraboloide. | Hiperboloide de Uma Folha  | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Cortes horizontais são elipses. Cortes verticais são hipérboles. O eixo de simetria corresponde à variável cujo coeficiente é negativo. |
| Paraboloide Hiperbólico  | $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ Cortes horizontais são hipérboles. Cortes verticais são parábolas. O caso aqui ilustrado corresponde a $c < 0$. | Hiperboloide de Duas Folhas  | $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Cortes horizontais em $z = k$ são elipses se $k > c$ ou se $k < -c$. Cortes verticais são hipérboles. Os dois sinais de menos indicam duas folhas. |

**EXEMPLO 7** Identifique e esboce a superfície $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$.

SOLUÇÃO Dividindo por $-4$, colocamos a equação na forma-padrão:

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$$

são usados para transmitir movimento de rotação entre eixos transversais. (Os dentes das engrenagens são as retas geradoras do hiperboloide. Veja o Exercício 49.)



Hiperboloides produzem transmissão por engrenagens.

## 12.6 EXERCÍCIOS

**1.** (a) O que a equação $y = x^2$ representa como uma curva em $\mathbb{R}^2$?
(b) O que ela representa como uma superfície em $\mathbb{R}^3$?
(c) O que a equação $z = y^2$ representa?

**2.** (a) Esboce o gráfico de $y = e^x$ como uma curva em $\mathbb{R}^2$.
(b) Esboce o gráfico de $y = e^x$ como uma superfície em $\mathbb{R}^3$.
(c) Descreva e esboce a superfície $z = e^y$.

**3-8** Descreva e esboce a superfície.

**3.** $y^2 + 4z^2 = 4$

**4.** $z = 4 - x^2$

**5.** $x - y^2 = 0$

**6.** $yz = 4$

**7.** $z = \cos x$

**8.** $x^2 - y^2 = 1$

**9.** (a) Encontre e identifique os cortes da superfície quádrica $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e explique por que o gráfico parece com o gráfico do hiperboloide de uma folha da Tabela 1.
(b) Se trocarmos a equação em (a) para $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, como isso afeta o gráfico?
(c) E se trocarmos a equação em (a) para $x^2 + y^2 + 2y - z^2 = 0$?

**10.** (a) Encontre e identifique os cortes da superfície quádrica $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e explique por que o gráfico parece com o gráfico do hiperboloide de duas folhas da Tabela 1.
(b) Se a equação na parte (a) for trocada para $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, o que acontece com o gráfico? Esboce o novo gráfico.

**11-20** Use cortes para esboçar e identificar as superfícies.

**11.** $x = y^2 + 4z^2$

**12.** $9x^2 - y^2 + z^2 = 0$

**13.** $x^2 = y^2 + 4z^2$

**14.** $25x^2 + 4y^2 + z^2 = 100$

**15.** $-x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$

**16.** $4x^2 + 9y^2 + z = 0$

**17.** $36x^2 + y^2 + 36z^2 = 36$

**18.** $4x^2 - 16y^2 + z^2 = 16$

**19.** $y = z^2 - x^2$

**20.** $x = y^2 - z^2$

**21-28** Faça uma correspondente entre a equação e seu gráfico (identificado por I-VIII). Justifique sua escolha.

**21.** $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$

**22.** $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

**23.** $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

**24.** $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

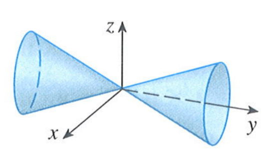
**25.** $y = 2x^2 + z^2$

**26.** $y^2 = x + 2z^2$

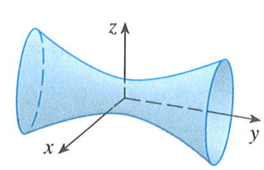
**27.** $x^2 + 2z^2 = 1$

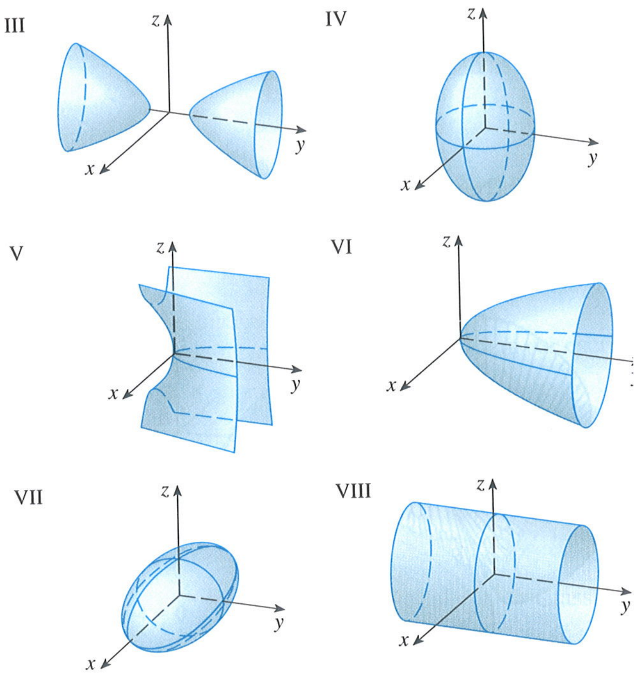
**28.** $y = x^2 - z^2$

I




II






**29-36** Coloque a equação na forma-padrão, classifique a superfície e esboce-a.

**29.** $z^2 = 4x^2 + 9y^2 + 36$

**30.** $x^2 = 2y^2 + 3z^2$

**31.** $x = 2y^2 + 3z^2$

**32.** $4x - y^2 + 4z^2 = 0$

**33.** $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4y - 24z + 36 = 0$

**34.** $4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20 = 0$

**35.** $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4 = 0$

**36.** $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z + 2 = 0$

**37-40** Use um computador com um programa que trace superfícies tridimensionais. Experimente diversos pontos de vista e diversos tamanhos de janela retangular até conseguir uma boa visão da superfície.

**37.** $-4x^2 - y^2 + z^2 = 1$

**38.** $x^2 - y^2 - z = 0$

**39.** $-4x^2 - y^2 + z^2 = 0$

**40.** $x^2 - 6x + 4y^2 - z = 0$

**41.** Esboce a região delimitada pelas superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 = 1$ para $1 \leq z \leq 2$.

**42.** Esboce a região delimitada pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$.

**43.** Determine uma equação da superfície obtida pela rotação da parábola $y = x^2$ em torno do eixo $y$.

**44.** Determine uma equação da superfície obtida pela rotação da reta $x = 3y$ em torno do eixo $x$.

**45.** Determine uma equação da superfície constituída de todos os pontos que são equidistantes do ponto $(-1, 0, 0)$ e do plano $x = 1$. Identifique essa superfície.

**46.** Determine uma equação da superfície constituída de todos os pontos $P$ para os quais a distância de $P$ ao eixo $x$ é o dobro da distância de $P$ ao plano $yz$. Identifique a superfície.

**47.** Tradicionalmente, a superfície da Terra tem sido modelada por uma esfera, mas o World Geodesic System de 1984 (WGS-84) usa um elipsoide como um modelo mais preciso. Ele coloca o centro da Terra na origem e o polo norte no eixo $z$ positivo. A distância do centro ao polo é 6 356,523 km e a distância a um ponto do equador é 6 378,137 km.

(a) Encontre uma equação para superfície da Terra como a usada pelo WGS-84.

(b) Curvas de latitude constante são cortes nos planos $z = k$. Qual a forma destas curvas?

(c) Meridianos (curvas com longitude constante) são cortes nos planos da forma $y = mx$. Qual é a forma destes meridianos?

**48.** Uma torre de resfriamento de um reator nuclear deve ser construída na forma de um hiperboloide de uma folha. O diâmetro na base é 280 m e o diâmetro mínimo, 500 m acima do solo, é 200 m. Encontre uma equação para a torre.

**49.** Mostre que se o ponto $(a, b, c)$ está em um paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, então as retas com equações paramétricas $x = a + t, y = b + t, z = c + 2(b - a)t$ e $x = a + t, y = b - t, z = c - 2(b + a)t$, estão ambas inteiramente neste paraboloide. (Isto mostra que o paraboloide hiperbólico é o que é chamado uma **superfície regrada**; ou seja, ela pode ser gerada pelo movimento de uma reta. De fato, este exercício mostra que por cada ponto do paraboloide hiperbólico existem duas retas geradoras. As únicas outras superfícies quádricas que são superfícies regradas são os cilindros, cones e hiperboloides de uma folha.)

**50.** Mostre que a curva obtida pela intersecção das superfícies $x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$ e $2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0$ está em um plano.

**51.** Desenhe as superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 1 - y^2$ em uma mesma tela usando uma janela de tamanho $|x| \leq 1{,}2$, $|y| \leq 1{,}2$, e observe a curva de intersecção. Mostre que a projeção dessa curva no plano $xy$ é uma elipse.

# 12 REVISÃO

## VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Qual a diferença entre um vetor e um escalar?
2. Como somamos dois vetores geometricamente? Como os somamos algebricamente?
3. Se **a** é um vetor e $c$ é um escalar, qual a relação entre $c\mathbf{a}$ e **a** geometricamente? Como determinar $c\mathbf{a}$ algebricamente?
4. Como determinar um vetor de um ponto a outro?
5. Como determinar o produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ de dois vetores se você conhece seus comprimentos e o ângulo entre eles? E se você conhece suas componentes?
6. Para que o produto escalar é útil?
7. Escreva as expressões para a projeção escalar e vetor projeção de **b** sobre **a**. Ilustre com um diagrama.
8. Como determinar o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de dois vetores se você conhece seus módulos e o ângulo entre eles? E se você conhece suas componentes?
9. Para que o produto vetorial é útil?
10. (a) Como calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores **a** e **b**?
    (b) Como calcular o volume do paralelepípedo definido pelos vetores **a**, **b** e **c**?
11. Como determinar um vetor perpendicular a um plano?
12. Como determinar o ângulo entre dois planos que se interceptam?
13. Escreva as equações vetorial, paramétricas e simétricas para uma reta.
14. Escreva as equações vetorial e escalar de um plano.
15. (a) Como você sabe se dois vetores são paralelos?
    (b) Como você sabe se dois vetores são perpendiculares?
    (c) Como você sabe se dois planos são paralelos?
16. (a) Descreva um método para determinar se três pontos $P$, $Q$ e $R$ estão alinhados.
    (b) Descreva um método para determinar se quatro pontos $P$, $Q$, $R$ e $S$ são coplanares.
17. (a) Como você determina a distância de um ponto a uma reta?
    (b) Como você determina a distância de um ponto a um plano?
    (c) Como você determina a distância entre retas?
18. O que são os traços de uma superfície? Como determiná-los?
19. Escreva as equações na forma-padrão dos seis tipos de quádricas.

## TESTES VERDADEIRO-FALSO

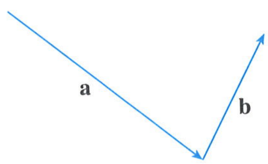
Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Para quaisquer vetores **u** e **v** em $V_3$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
2. Para quaisquer vetores **u** e **v** em $V_3$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$.
3. Para quaisquer vetores **u** e **v** em $V_3$, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{v} \times \mathbf{u}|$.
4. Para quaisquer vetores **u** e **v** em $V_3$ e qualquer escalar $k$, $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$.
5. Para quaisquer vetores **u** e **v** em $V_3$ e qualquer escalar $k$, $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v}$.
6. Para quaisquer vetores **u**, **v** e **w** em $V_3$, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$.
7. Para quaisquer vetores **u**, **v** e **w** em $V_3$, $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.
8. Para quaisquer vetores **u**, **v** e **w** em $V_3$, $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$.
9. Para quaisquer vetores **u** e **v** em $V_3$, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$.
10. Para quaisquer vetores **u** e **v** em $V_3$, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
11. O produto vetorial de dois vetores unitários é um vetor unitário.
12. A equação linear $Ax + By + Cz + D = 0$ representa uma reta no espaço.
13. O conjunto de pontos $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1\}$ é uma circunferência.
14. Se $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, então $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle u_1 v_1, u_2 v_2 \rangle$.
15. Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, então $\mathbf{u} = 0$ ou $\mathbf{v} = 0$.
16. Se $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, então $\mathbf{u} = 0$ ou $\mathbf{v} = 0$.
17. Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ e $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, então $\mathbf{u} = 0$ ou $\mathbf{v} = 0$.
18. Se **u** e **v** estão em $V_3$, então $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.

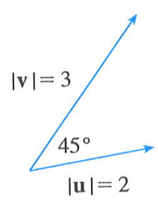
## EXERCÍCIOS

**1.** (a) Encontre uma equação da esfera que passa pelo ponto $(6, -2, 3)$ e tem centro $(-1, 2, 1)$.
(b) Encontre a curva na qual esta esfera intercepta o plano $yz$.
(c) Encontre o centro e o raio da esfera
$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 6z + 1 = 0$$

**2.** Copie os vetores da figura e utilize-os para desenhar os seguintes vetores.
(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (c) $-\frac{1}{2}\mathbf{a}$ (d) $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$




**3.** Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são os vetores mostrados na figura, determine $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. O sentido do vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é entrando ou saindo do papel?




**4.** Calcule a quantidade dada se
$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \qquad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad \mathbf{c} = \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$
(a) $2\mathbf{a} + 3\,\mathbf{b}$
(b) $|\mathbf{b}|$
(c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
(d) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
(e) $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$
(f) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(g) $\mathbf{c} \times \mathbf{c}$
(h) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(i) $\text{comp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$
(j) $\text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$
(k) O ângulo entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (com precisão de um grau)

**5.** Determine os valores de $x$ tais que os vetores $\langle 3, 2, x\rangle$ e $\langle 2x, 4, x\rangle$ sejam ortogonais.

**6.** Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais a $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

**7.** Suponha que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 2$. Determine
(a) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$
(b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$
(c) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
(d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$

**8.** Mostre que, se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ estão em $V_3$, então
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})] = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]^2$$

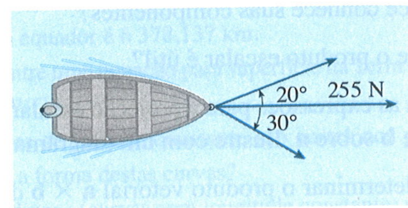
**9.** Determine o ângulo agudo entre duas diagonais de um cubo.

**10.** Dados os pontos $A(1, 0, 1)$, $B(2, 3, 0)$, $C(-1, 1, 4)$ e $D(0, 3, 2)$, determine o volume do paralelepípedo com lados adjacentes $AB$, $AC$ e $AD$.

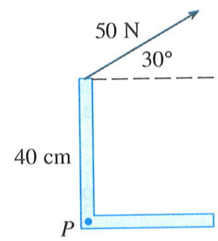
**11.** (a) Determine um vetor perpendicular ao plano que passa pelos pontos $A(1, 0, 0)$, $B(2, 0, -1)$ e $C(1, 4, 3)$.
(b) Determine a área do triângulo $ABC$.

**12.** Uma força constante $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ move um objeto ao longo de um segmento de reta de $(1, 0, 2)$ a $(5, 3, 8)$. Determine o trabalho realizado se a distância é medida em metros e a força em newtons.

**13.** Um barco é puxado para a praia usando duas cordas, como mostrado no diagrama. Se é necessária uma força de 255 N, determine o módulo da força exercida em cada corda.




**14.** Determine a módulo do torque em relação ao ponto $P$ se uma força de 50 N é aplicada como mostrado.




**15-17** Determine as equações paramétricas da reta.

**15.** Que passa pelos pontos $(4, -1, 2)$ e $(1, 1, 5)$

**16.** Que passa pelos pontos $(1, 0, -1)$ e é paralela à reta $\frac{1}{3}(x - 4) = \frac{1}{2}y = z + 2$

**17.** Que passa por $(-2, 2, 4)$ e é perpendicular ao plano $2x - y + 5z = 12$

**18-20** Determine a equação do plano que satisfaz as condições.

**18.** Passa por $(2, 1, 0)$ e é paralelo a $x + 4y - 3z = 1$

**19.** Passa por $(3, -1, 1)$, $(4, 0, 2)$ e $(6, 3, 1)$

**20.** Passa por $(1, 2, -2)$ e contém a reta $x = 2t$, $y = 3 - t$, $z = 1 + 3t$

**21.** Determine o ponto no qual a reta com equações paramétricas $x = 2 - t$, $y = 1 + 3t$, $z = 4t$, intercepta o plano $2x - y + z = 2$.

**22.** Determine a distância da origem até a reta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = -1 + 2t$.

**23.** Determine se as retas dadas pelas equações simétricas

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$$

e

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+5}{2}$$

são paralelas, reversas ou concorrentes.

**24.** (a) Mostre que os planos $x + y - z = 1$ e $2x - 3y + 4z = 5$ não são nem paralelos nem perpendiculares.

(b) Determine, com precisão de um grau, o ângulo entre os planos.

**25.** Encontre uma equação do plano que passa pela reta de intersecção dos planos $x - z = 1$ e $y + 2z = 3$ e é perpendicular ao plano $x + y - 2z = 1$.

**26.** (a) Encontre uma equação do plano que passa pelos pontos $A(2, 1, 1)$, $B(-1, -1, 10)$ e $C(1, 3, -4)$.

(b) Encontre as equações simétricas da reta que passa por $B$ e é perpendicular ao plano da parte (a).

(c) Um segundo plano passa por $(2, 0, 4)$ e tem vetor normal $\langle 2, -4, -3 \rangle$. Mostre que o ângulo agudo entre os planos é aproximadamente 43°.

(d) Encontre as equações paramétricas para a reta intersecção dos dois planos.

**27.** Determine a distância entre os planos $3x + y - 4z = 2$ e $3x + y - 4z = 24$.

**28-36** Identifique e esboce o gráfico de cada superfície.

**28.** $x = 3$

**29.** $x = z$

**30.** $y = z^2$

**31.** $x^2 = y^2 + 4z^2$

**32.** $4x - y + 2z = 4$

**33.** $-4x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$

**34.** $y^2 + z^2 = 1 + x^2$

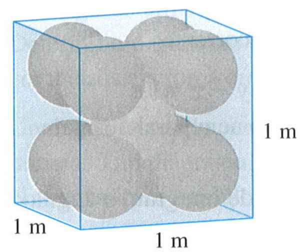
**35.** $4x^2 + 4y^2 - 8y + z^2 = 0$

**36.** $x = y^2 + z^2 - 2y - 4z = 5$

**37.** Um elipsoide é gerado pela rotação da elipse $4x^2 + y^2 = 16$ em torno do eixo $x$. Determine uma equação do elipsoide.

**38.** Uma superfície é constituída de todos os pontos $P$ tais que a distância de $P$ ao plano $y = 1$ é o dobro da distância de $P$ ao ponto $(0, -1, 0)$. Determine a equação dessa superfície e identifique-a.

1. Cada lado de uma caixa cúbica mede 1 m. A caixa contém nove bolas de mesmo raio $r$. O centro de uma das bolas está no centro da caixa, e essa bola encosta em todas as outras oito bolas. Cada uma das oito bolas toca 3 lados da caixa. As bolas estão firmemente alojadas na caixa. (Veja a figura.) Determine o raio $r$. (Se você tiver problemas com este exercício, leia sobre a estratégia de resolver problemas através do *Uso de Analogias* na página 66, no Volume I.)

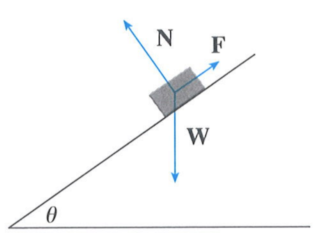



2. Seja $B$ uma caixa sólida de comprimento $C$, largura $L$ e altura $H$. Seja $S$ o conjunto de todos os pontos que estão a uma distância de no máximo 1 de algum ponto de $B$. Expresse o volume de $S$ em função de $C$, $L$ e $H$.

3. Seja $L$ a reta obtida pela intersecção dos planos $cx + y + z = c$ e $x - cy + cz = -1$, onde $c$ é um número real.
   (a) Determine as equações simétricas da reta $L$.
   (b) Quando o número $c$ varia, a reta $L$ descreve uma superfície $S$. Determine a equação da curva resultante da intersecção de $S$ com o plano horizontal $z = t$ (corte de $S$ no plano $z = t$).
   (c) Determine o volume do sólido limitado por $S$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 1$.

4. Um avião é capaz de viajar a 180 km/h em condições normais. O piloto decola e voa em direção ao norte, guiado pela bússola do avião. Depois de 30 minutos de voo, o piloto constata que, em decorrência do vento, viajou 80 km a um ângulo de 5° a leste do norte.
   (a) Qual a velocidade do vento?
   (b) Para que direção o piloto deveria ter dirigido o avião para alcançar o destino pretendido?

5. Suponha que um bloco de massa $m$ seja colocado em um plano inclinado, como mostrado na figura. A descida do bloco pelo plano inclinado é freada pela força de atrito; se $\theta$ não for grande o suficiente, o atrito impedirá qualquer deslocamento do bloco. As forças que agem sobre o bloco são seu peso $\mathbf{W}$, onde $|\mathbf{W}| = mg$ ($g$ é a aceleração da gravidade); a força normal $\mathbf{N}$ (a componente normal da força de reação no plano do bloco) onde $|\mathbf{N}| = n$; e a força $\mathbf{F}$ devida ao atrito, que age paralelamente ao plano inclinado, no sentido contrário ao movimento. Se o bloco estiver parado e $\theta$ for aumentado, $|\mathbf{F}|$ aumentará até atingir um valor máximo, além do qual o bloco começará a deslizar. Nesse ângulo $\theta_s$, pode ser observado que $|\mathbf{F}|$ é proporcional a $n$. Então, quando $|\mathbf{F}|$ é máximo, podemos dizer que $|\mathbf{F}| = \mu_s n$, onde $\mu_s$ é chamado *coeficiente de atrito estático* e depende dos materiais que estão em contato.



(a) Observe que $\mathbf{N} + \mathbf{F} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$ e deduza que $\mu_s = \operatorname{tg}(\theta_s)$.

(b) Suponha que, para $\theta > \theta_s$, uma força externa $\mathbf{H}$ seja aplicada ao bloco, horizontalmente da esquerda para a direita, e seja $|\mathbf{H}| = h$. Se $h$ for pequeno, o bloco poderá ainda deslizar; se $h$ for suficientemente grande, o bloco subirá o plano inclinado. Seja $h_{\text{min}}$ o menor valor de $h$ que permita ao bloco permanecer parado (de modo que, $|\mathbf{F}|$ é máximo).

Escolhendo os eixos coordenados de modo que $\mathbf{F}$ esteja na direção do eixo $x$, determine para cada força atuante suas componentes paralela e perpendicular ao plano inclinado e mostre que

$$h_{\text{min}} \operatorname{sen} \theta + mg \cos \theta = n \qquad \text{e} \qquad h_{\text{min}} \cos \theta + \mu_s n = mg \operatorname{sen} \theta$$

(c) Mostre que $$h_{\text{min}} = mg \operatorname{tg}(\theta - \theta_s)$$
Isso parece razoável? Faz sentido para $\theta = \theta_s$? E quando $\theta \longrightarrow 90^\circ$? Explique.

(d) Seja $h_{\text{max}}$ o maior valor de $h$ que permita ao bloco permanecer parado. (Nesse caso, qual o sentido de $\mathbf{F}$?) Mostre que

$$h_{\text{max}} = mg \operatorname{tg}(\theta + \theta_s)$$

Essa equação parece razoável? Explique.