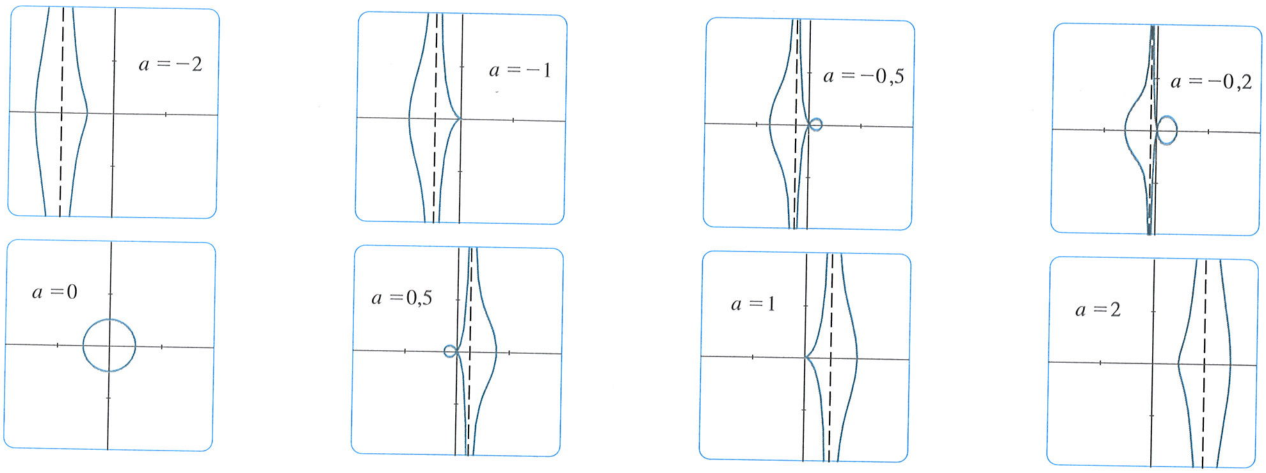


FIGURA 17
Membros da família $x = a + \cos t$, $y = a \operatorname{tg} t + \operatorname{sen} t$, todos traçados na janela retangular $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

Quando $a < -1$, ambos os ramos são lisos; mas quando a se aproxima de -1, o ramo direito adquire um formato pontudo, chamado *cúspide*. Para a entre -1 e 0 a cúspide se torna um laço, que se torna maior quando a se aproxima de 0. Quando $a = 0$, ambos os ramos se juntam e formam um círculo (veja o Exemplo 2). Para a entre 0 e 1, o ramo esquerdo tem um laço, que se encolhe para se tornar uma cúspide quando $a = 1$. Para $a > 1$, os ramos se tornam lisos novamente e, quando a aumenta mais ainda, eles se tornam menos curvados. Observe que as curvas com a positivo são reflexões em torno do eixo y das curvas correspondentes com a negativo.

Essas curvas são denominadas **conchoides de Nicomedes**, em homenagem ao antigo estudioso grego Nicomedes. Ele as chamou de conchoides porque o formato de seus ramos lembra uma concha. □

10.1 EXERCÍCIOS

1-4 Esboce a curva usando as equações paramétricas para marcar os pontos. Indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando t aumenta.

1. $x = 1 + \sqrt{t}$, $y = t^2 - 4t$, $0 \leqslant t \leqslant 5$

2. $x = 2\cos t$, $y = t - \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

3. $x = 5 \operatorname{sen} t$, $y = t^2$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$

4. $x = e^{-t} + t$, $y = e^t - t$, $-2 \leqslant t \leqslant 2$

5-10

(a) Esboce a curva usando as equações paramétricas para marcar os pontos. Indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando t aumenta.

(b) Elimine o parâmetro para encontrar uma equação cartesiana da curva.

5. $x = 3t - 5$, $y = 2t + 1$

6. $x = 1 + t$, $y = 5 - 2t$, $-2 \leqslant t \leqslant 3$

7. $x = t^2 - 2$, $y = 5 - 2t$, $-3 \leqslant t \leqslant 4$

8. $x = 1 + 3t$, $y = 2 - t^2$

9. $x = \sqrt{t}$, $y = 1 - t$

10. $x = t^2$, $y = t^3$

11-18

(a) Elimine o parâmetro para encontrar uma equação cartesiana da curva.

(b) Esboce a curva e indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada quando o parâmetro aumenta.

11. $x = \operatorname{sen} \theta$, $y = \cos \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

12. $x = 4\cos \theta$, $y = 5 \operatorname{sen} \theta$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$

13. $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{cossec} t$, $0 < t < \pi/2$

14. $x = \sec \theta$, $y = \operatorname{tg} \theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$

15. $x = e^t$, $y = e^{-t}$

16. $x = \ln t$, $y = \sqrt{t}$, $t \geqslant 1$

17. $x = \operatorname{senh} t$, $y = \cosh t$

18. $x = 2\cosh t$, $y = 5 \operatorname{senh} t$

19-22 Descreva o movimento de uma partícula com posição (x, y) quando t varia no intervalo dado.

19. $x = \cos \pi t, \quad y = \operatorname{sen} \pi t, \quad 1 \leqslant t \leqslant 2$

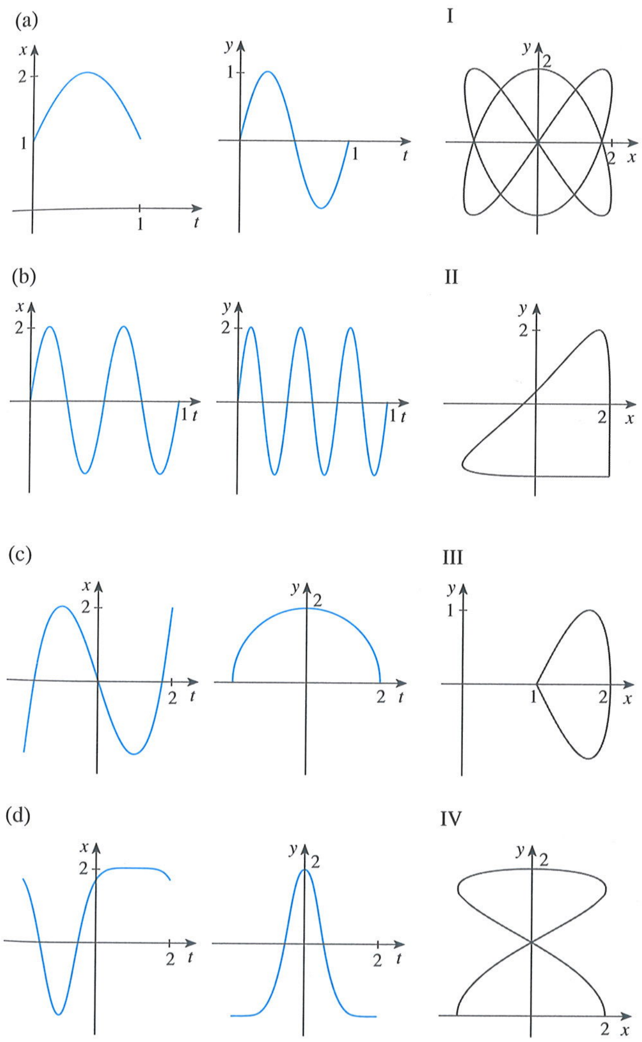
20. $x = 2 + \cos t, \quad y = 3 + \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

21. $x = 5 \operatorname{sen} t, \quad y = 2 \cos t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant 5\pi$

22. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos^2 t, \quad -2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

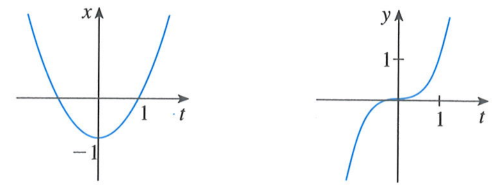
23. Suponha que uma curva seja dada pela equação paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$ onde a imagem de f é $(1, 4)$ e a imagem de g é $(2, 3)$. O que você pode dizer sobre a curva?

24. Associe os gráficos das equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ em (a)–(d) com as curvas paramétricas rotuladas de I-IV. Justifique suas escolhas.

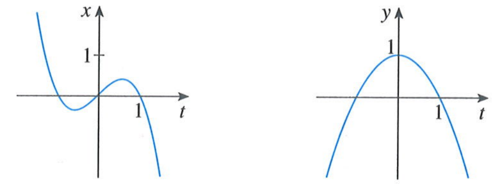


25-27 Use os gráficos de $x = f(t)$ e $y = g(t)$ para esboçar a curva paramétrica $x = f(t)$ e $y = g(t)$. Indique com setas a direção na qual a curva é traçada à medida que t aumenta.

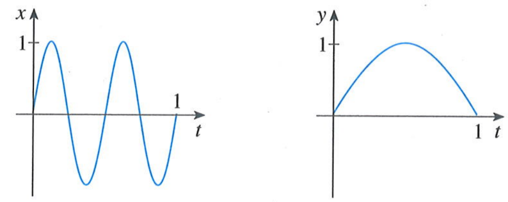
25.



26.



27.



28. Associe as equações paramétricas aos gráficos de I–VI. Justifique sua escolha. (Não use uma ferramenta gráfica.)

(a) $x = t^4 - t + 1, \quad y = t^2$

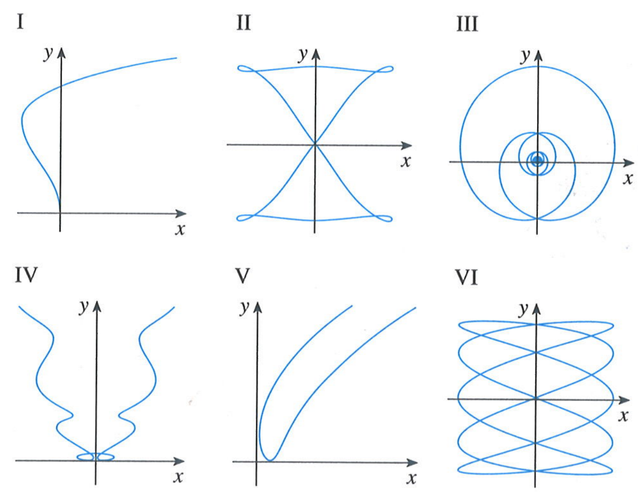
(b) $x = t^2 - 2t, \quad y = \sqrt{t}$

(c) $x = \operatorname{sen} 2t, \quad y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} 2t)$

(d) $x = \cos 5t, \quad y = \operatorname{sen} 2t$

(e) $x = t + \operatorname{sen} 4t, \quad y = t^2 + \cos 3t$

(f) $x = \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{4 + t^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2t}{4 + t^2}$,



29. Trace a curva $x = y - 3y^3 + y^5$.

30. Trace as curvas $y = x^5$ e $x = y(y - 1)^2$ e encontre seus pontos de intersecção, com precisão de uma casa decimal.

31. (a) Mostre que as equações paramétricas

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t \qquad y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

onde $0 \leqslant t \leqslant 1$ descrevem o segmento de reta que une os pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$.

(b) Encontre as equações paramétricas para representar o segmento de reta de $(-2, 7)$ até $(3, -1)$.

32. Usando uma ferramenta gráfica e o resultado do Exercício 31(a), desenhe o triângulo com vértices $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ e $C(1, 5)$.

33. Encontre equações paramétricas para a trajetória de uma partícula que se move ao longo do círculo $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ da seguinte maneira:

(a) Uma vez no sentido horário, a partir de $(2, 1)$.

(b) Três vezes no sentido anti-horário, a partir de $(2, 1)$.

(c) Meia-volta no sentido anti-horário, a partir de $(0, 3)$.

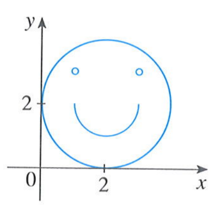
34. (a) Encontre equações paramétricas para a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. [*Sugestão*: Modifique as equações do círculo no Exemplo 2.]

(b) Use as equações paramétricas para traçar a elipse quando $a = 3$ e $b = 1, 2, 4$ e 8.

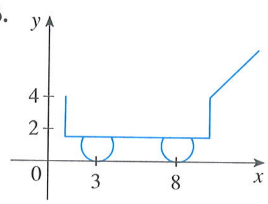
(c) Como muda o formato da elipse quando b varia?

35-36 Use uma calculadora gráfica ou um computador para reproduzir a figura.

35.



36.



37-38 Compare as curvas representadas pelas equações paramétricas. Em que elas diferem?

37. (a) $x = t^3$, $y = t^2$ (b) $x = t^6$, $y = t^4$
(c) $x = e^{-3t}$, $y = e^{-2t}$

38. (a) $x = t$, $y = t^{-2}$ (b) $x = \cos t$, $y = \sec^2 t$
(c) $x = e^t$, $y = e^{-2t}$

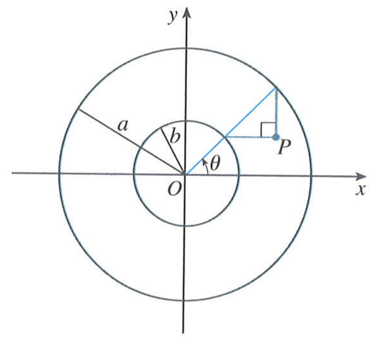
39. Deduza as Equações 1 para o caso $\pi/2 < \theta < \pi$.

40. Seja P um ponto a uma distância d do centro de um círculo de raio r. A curva traçada por P quando o círculo gira sobre uma reta é chamada **trocoide**. (Pense no movimento de um ponto sobre um raio de uma roda de bicicleta.) A cicloide é um caso especial de trocoide com $d = r$. Usando o mesmo parâmetro θ que para a cicloide e supondo que a reta seja o eixo x e $\theta = 0$ quando P está em um de seus pontos mais baixos, mostre que as equações paramétricas para a trocoide são

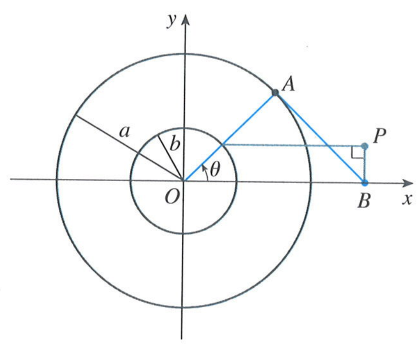
$$x = r\theta - d\,\text{sen}\,\theta \qquad y = r - d\cos\theta$$

Esboce a trocoide para os casos $d < r$ e $d > r$.

41. Se a e b forem números fixos, encontre equações paramétricas para a curva que consiste de todas as posições possíveis do ponto P na figura, usando o ângulo θ como parâmetro. Então elimine o parâmetro e identifique a curva.



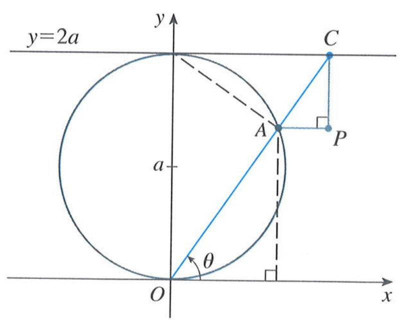
42. Se a e b forem números fixos, encontre as equações paramétricas para a curva que consiste de todas as posições possíveis do ponto P na figura, usando o ângulo θ como parâmetro. Então elimine o parâmetro e identifique a curva. O segmento de reta AB é tangente ao círculo maior.



43. Uma curva, denominada **bruxa de Maria Agnesi**, consiste em todas as possíveis posições do ponto P na figura. Mostre que equações paramétricas para essa curva podem ser escritas como

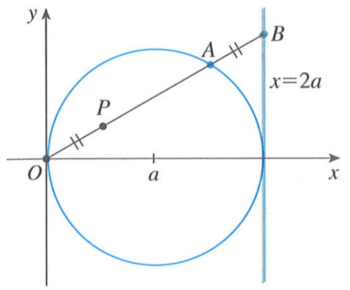
$$x = 2a\,\text{cotg}\,\theta \qquad y = 2a\,\text{sen}^2\theta$$

Esboce a curva.



44. (a) Encontre as equações paramétricas para o conjunto de todos os pontos P, como mostrado na figura, tais que $|OP| = |AB|$. Esboce a curva. (Essa curva é chamada **cissoide de Diocles**, em homenagem ao estudioso grego Diocles, que introduziu a cissoide como um método gráfico para a construção da aresta de um cubo cujo volume é o dobro daquele de um cubo dado.)

(b) Use a descrição geométrica da curva para desenhar um esboço das curvas à mão. Verifique seu trabalho usando as equações paramétricas para traçar a curva.



45. Suponha que a posição de uma partícula no instante t seja dada por

$$x_1 = 3 \text{ sen } t \qquad y_1 = 2 \cos t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

e que a posição de uma segunda partícula seja dada por

$$x_2 = -3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \text{sen } t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

(a) Trace as trajetórias de ambas as partículas. Quantos pontos de intersecção existem?

(b) Alguns desses pontos de intersecção são *pontos de colisão*? Em outras palavras, essas partículas alguma vez estão no mesmo lugar ao mesmo tempo? Se isso ocorrer, encontre os pontos de colisão.

(c) Descreva o que acontecerá se a trajetória da segunda partícula for dada por

$$x_2 = 3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \text{sen } t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

46. Se um projétil for atirado com uma velocidade inicial v_0 metros por segundo com um ângulo α acima da horizontal e a resistência do ar for considerada desprezível, então sua posição depois de t segundos é dada pelas equações paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = (v_0 \text{ sen } \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

onde g é a aceleração da gravidade (9,8 m/s^2).

(a) Se uma arma for disparada com $\alpha = 30^\circ$ e $v_0 = 500$ m/s, quando a bala atingirá o solo? A que distância da arma a bala atingirá o solo? Qual a altura máxima alcançada pela bala?

(b) Use uma ferramenta gráfica para verificar suas respostas na parte (a). Então trace a trajetória do projétil para vários outros valores do ângulo α para ver onde a bala atinge o solo. Resuma o que você encontrou.

(c) Mostre que a trajetória é parabólica, eliminando o parâmetro.

47. Investigue a família de curvas definidas pelas equações paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - ct$. Como muda o formato quando c aumenta? Ilustre, traçando vários membros da família.

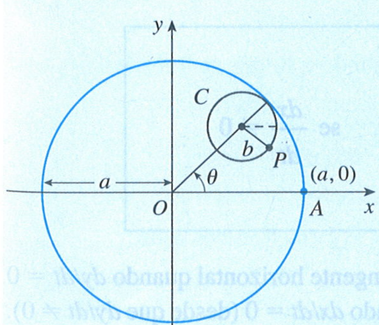
48. As **curvas de catástrofe em forma de cauda de andorinha** são definidas pelas equações paramétricas $x = 2ct - 4t^3$, $y = -ct^2 + 3t^4$. Trace várias dessas curvas. Quais as características que essas curvas têm em comum? Como variam quando c aumenta?

49. As curvas com equações $x = a \text{ sen } nt$, $y = b \cos t$ são chamadas **figuras de Lissajous**. Investigue como essas curvas mudam quando a, b e n variam. (Tome n como um inteiro positivo.)

50. Investigue a família de curvas definidas pelas equações paramétricas $x = \cos t$, $y = \text{sen } t - \text{sen } ct$, onde $c > 0$. Comece tomando c como um inteiro positivo e veja o que acontece com a forma à medida que c cresce. A seguir, explore algumas das possibilidades que ocorrem quando c é uma fração.

PROJETO DE LABORATÓRIO — ROLANDO CÍRCULOS AO REDOR DE CÍRCULOS

Neste projeto investigaremos as famílias de curvas, chamadas *hipocicloides* e *epicicloides*, que são geradas pelo movimento de um ponto em um círculo que rola dentro ou fora de outro círculo.



1. Uma **hipocicloide** é uma curva traçada por um ponto fixo P em um círculo C de raio b quando C rola dentro de um círculo com centro O e raio a. Mostre que, se a posição inicial de P for $(a, 0)$ e o parâmetro θ for escolhido como na figura, então as equações paramétricas da hipocicloide são

$$x = (a - b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right) \qquad y = (a - b)\text{ sen }\theta - b\text{ sen }\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$$

2. Use uma ferramenta gráfica para desenhar os gráficos de hipocicloides com a um inteiro positivo e $b = 1$. Como o valor de a afeta o gráfico? Mostre que, se tomarmos $a = 4$, então as equações paramétricas da hipocicloide se reduzirão a

$$x = 4\cos^3\theta \qquad y = 4\text{ sen}^3\theta$$

Essa curva é denominada **hipocicloide de quatro cúspides**, ou **astroide**.

3. Agora tente $b = 1$ e a $= n/d$, uma fração onde n e d não têm fator comum. Primeiro faça $n = 1$ e tente determinar graficamente o efeito do denominador d no formato do gráfico. Então faça n variar mantendo d constante. O que acontece quando $n = d + 1$?

4. O que acontece se $b = 1$ e a for irracional? Experimente com um número irracional do tipo $\sqrt{2}$ ou $e - 2$. Tome valores cada vez maiores para θ e especule sobre o que deveria acontecer se traçássemos a hipocicloide para todos os valores reais de θ.
5. Se o círculo C rolar do lado de fora de um círculo fixo, a curva traçada por P será chamada **epicicloide**. Encontre equações paramétricas para a epicicloide.
6. Investigue os possíveis formatos para a epicicloide. Use métodos similares aos Problemas 2-4.

10.2 CÁLCULO COM CURVAS PARAMETRIZADAS

Tendo visto como representar as curvas por equações paramétricas, vamos agora aplicar os métodos de cálculo a essas curvas parametrizadas. Em particular, resolveremos problemas envolvendo tangentes, área, comprimento de arco e área de superfície.

TANGENTES

Na seção anterior, vimos que algumas curvas definidas por equações paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ podem também ser expressas, pela eliminação do parâmetro, na forma $y = F(x)$. (Veja o Exercício 67 para as condições gerais sob as quais isso é possível.) Se substituirmos $x = f(t)$ e $y = g(t)$ na equação $y = F(x)$, obteremos

$$g(t) = F(f(t))$$

assim, se g, F e f forem deriváveis, a Regra da Cadeia fornece

$$g'(t) = F'(f(t))f'(t) = F'(x)f'(t)$$

Se $f'(t) \neq 0$, podemos isolar $F(x)$:

$$\boxed{1} \qquad F'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Como a inclinação da tangente à curva $y = F(x)$ em $(x, F(x))$ é $F'(x)$, a Equação 1 nos permite encontrar tangentes a curvas paramétricas sem ter de eliminar o parâmetro. Usando a notação de Leibniz, podemos reescrever a Equação 1 de uma maneira fácil de lembrar:

■ Se pensarmos em uma curva parametrizada sendo traçada pelo movimento de uma partícula, então dy/dt e dx/dt são as velocidades vertical e horizontal da partícula e a Fórmula 2 diz que a inclinação da tangente é a razão dessas velocidades.

$$\boxed{2} \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \qquad \text{se } \frac{dx}{dt} \neq 0}$$

Podemos ver da Equação 2 que a curva tem uma tangente horizontal quando $dy/dt = 0$ (desde que $dx/dt \neq 0$) e tem uma tangente vertical quando $dx/dt = 0$ (desde que $dy/dt \neq 0$). Essa informação é útil para esboçar as curvas parametrizadas.

Como sabemos do Capítulo 4, é também útil considerar d^2y/dx^2. Isso pode ser encontrado mudando y por dy/dx na Equação 2:

O resultado do Exemplo 5 diz que o comprimento de um arco de uma cicloide é oito vezes o raio do círculo gerador (veja a Figura 5). Isso foi demonstrado pela primeira vez em 1658 por *sir* Christopher Wren, que depois se tornou o arquiteto da Catedral de São Paulo, em Londres.

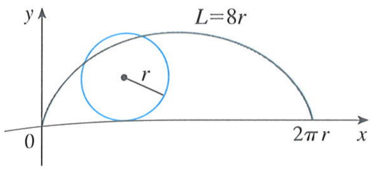


FIGURA 5

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}\, d\theta = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos\theta)}\, d\theta$$

Para calcular essa integral, usamos a identidade $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ com $\theta = 2x$, que fornece $1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$. Como $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, temos $0 \leqslant \theta/2 \leqslant \pi$, e assim $\operatorname{sen}(\theta/2) \geqslant 0$. Portanto,

$$\sqrt{2(1-\cos\theta)} = \sqrt{4\operatorname{sen}^2(\theta/2)} = 2\,|\operatorname{sen}(\theta/2)| = 2\operatorname{sen}(\theta/2)$$

e, dessa forma,

$$L = 2r\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\theta/2)\, d\theta = 2r\big[-2\cos(\theta/2)\big]_0^{2\pi}$$
$$= 2r[2 + 2] = 8r$$

□

ÁREA DA SUPERFÍCIE

Da mesma maneira como para o comprimento do arco, podemos adaptar a Fórmula 8.2.5, no Volume I, para obter uma fórmula para a área da superfície. Se a curva dada pelas equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, girar em torno do eixo x, onde f', g' são contínuas e $g(t) \geqslant 0$, então a área da superfície resultante é dada por

7
$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

As fórmulas simbólicas gerais $S = \int 2\pi y\, ds$ e $S = \int 2\pi x\, ds$ (Fórmulas 8.2.7 e 8.2.8, no Volume I, ainda são válidas, mas para as curvas parametrizadas usamos

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

EXEMPLO 6 Mostre que a área da superfície de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$.

SOLUÇÃO A esfera é obtida pela rotação do semicírculo

$$x = r\cos t \qquad y = r\operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

em torno do eixo x. Portanto, a partir da Fórmula 7, temos

$$S = \int_0^\pi 2\pi r \operatorname{sen} t \sqrt{(-r\operatorname{sen} t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt$$
$$= 2\pi \int_0^\pi r\operatorname{sen} t \sqrt{r^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)}\, dt = 2\pi \int_0^\pi r\operatorname{sen} t \cdot r\, dt$$
$$= 2\pi r^2 \int_0^\pi \operatorname{sen} t\, dt = 2\pi r^2(-\cos t)\Big]_0^\pi = 4\pi r^2$$

□

10.2 EXERCÍCIOS

1-2 Encontre dy/dx.

1. $x = t - t^3$, $y = 2 - 5t$ **2.** $x = te^t$, $y = t + e^t$

3-6 Encontre uma equação da tangente à curva no ponto correspondente ao valor do parâmetro dado.

3. $x = t^2 + t$, $y = t^2 - t$; $t = 0$

4. $x = t - t^{-1}$, $y = 1 + t^2$; $t = 1$

5. $x = e^{\sqrt{t}}$, $y = t - \ln t^2$; $t = 1$

6. $x = t\operatorname{sen} t$, $y = t\cos t$; $t = \pi$

7-8 Encontre uma equação da tangente à curva no ponto dado por dois métodos: (a) sem eliminar o parâmetro e (b) primeiro eliminando o parâmetro.

7. $x = 1 + \ln t$, $y = t^2 + 2$; $(1, 3)$

8. $x = \operatorname{tg}\theta$, $y = \sec\theta$; $(1, \sqrt{2})$

9-10 Encontre uma equação da(s) tangente(s) à curva no ponto dado. A seguir, trace a curva e a(s) tangente(s)

9. $x = 6\operatorname{sen} t$, $y = t^2 + t$; $(0, 0)$

10. $x = \cos t + \cos 2t, \quad y = \text{sen}\, t + \text{sen}\, 2t; \quad (-1, 1)$

11-16 Encontre dy/dx e d^2y/dx^2. Para quais valores de t a curva é côncava para cima?

11. $x = 4 + t^2, \quad y = t^2 + t^3$

12 $x = t^3 - 12t, \quad y = t^2 - 1$

13. $x = t - e^t, \quad y = t + e^{-t}$

14. $x = t + \ln t, \quad y = t - \ln t$

15. $x = 2\,\text{sen}\, t, \quad y = 3 \cos t, \quad 0 < t < 2\pi$

16. $x = \cos 2t, \quad y = \cos t, \quad 0 < t < \pi$

17-20 Encontre os pontos na curva onde a tangente é horizontal ou vertical. Se você tiver uma ferramenta gráfica, trace a curva.

17. $x = 10 - t^2, \quad y = t^3 - 12t$

18. $x = 2t^3 + 3t^2 - 12t, \quad y = 2t^3 + 3t^2 + 1$

19. $x = 2 \cos \theta, \quad y = \text{sen}\, 2\theta$

20. $x = \cos 3\theta, \quad y = 2\,\text{sen}\, \theta$

21. Use um gráfico para estimar as coordenadas do ponto mais à esquerda na curva $x = t - t^6$, $y = e^t$. A seguir, use o cálculo para encontrar as coordenadas exatas.

22. Use um gráfico para estimar as coordenadas do ponto mais baixo e do ponto mais à esquerda na curva $x = t^4 - 2t$, $y = t + t^4$. A seguir, encontre as coordenadas exatas.

23-24 Trace a curva em uma janela retangular que mostre todos os aspectos importantes da curva.

23. $x = t^4 - 2t^3 - 2t^2, \quad y = t^3 - t$

24. $x = t^4 + 4t^3 - 8t^2, \quad y = 2t^2 - t$

25. Mostre que a curva $x = \cos t$, $y = \text{sen}\, t \cos t$ tem duas tangentes em $(0, 0)$ e encontre suas equações. Esboce a curva.

26. Trace a curva $x = \cos t + 2 \cos 2t$, $y = \text{sen}\, t + 2\,\text{sen}\, 2t$ para descobrir onde ela intercepta a si mesma. A seguir, encontre equações para ambas as tangentes nesse ponto.

27. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à trocoide $x = r\theta - d\,\text{sen}\, \theta$, $y = r - d \cos \theta$ em termos de θ. (Veja o Exercício 40, na Seção 10.1.)
(b) Mostre que, se $d < r$, então a trocoide não tem uma tangente vertical.

28. (a) Encontre a inclinação da tangente à astroide $x = a \cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\theta$ em termos de θ. (As astroides foram exploradas no Projeto de Laboratório na página 597.)
(b) Em que pontos a tangente é horizontal ou vertical?
(c) Em que pontos a tangente tem inclinação 1 ou -1?

29. Em quais pontos na curva $x = 2t^3$, $y = 1 + 4t - t^2$, a reta tangente tem inclinação 1?

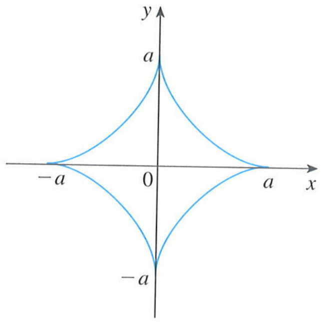
30. Encontre as equações das tangentes à curva $x = 3t^2 + 1$, $y = 2t^3 + 1$ que passam pelo ponto $(4, 3)$.

31. Use as equações paramétricas de uma elipse, $x = a \cos \theta$, $y = b\,\text{sen}\, \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, para calcular a área limitada por essas curvas.

32. Calcule a área limitada pela curva $x = t^2 - 2t$, $y = \sqrt{t}$ e pelo eixo y.

33. Encontre a área limitada pelo eixo x e pela curva $x = 1 + e^t$, $y = t - t^2$.

34. Calcule a área da região limitada pela astroide $x = a \cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\theta$. (As astroides foram exploradas no Projeto de Laboratório na página 597.)



35. Encontre a área sob um arco da trocoide do Exercício 40, na Seção 10.1, para o caso $d < r$.

36. Seja $\mathcal{R}$ a região dentro do laço da curva no Exemplo 1.
(a) Calcule a área de $\mathcal{R}$.
(b) Se $\mathcal{R}$ girar em torno do eixo x, encontre o volume do sólido resultante.
(c) Encontre o centroide de $\mathcal{R}$.

37-40 Escreva uma integral que represente o comprimento da curva. A seguir, use sua calculadora para encontrar o comprimento com precisão de quatro casas decimais.

37. $x = t - t^2, \quad y = \frac{4}{3} t^{3/2}, \quad 1 \leq t \leq 2$

38. $x = 1 + e^t, \quad y = t^2, \quad -3 \leq t \leq 3$

39. $x = t + \cos t, \quad y = t - \text{sen}\, t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

40. $x = \ln t, \quad y = \sqrt{t + 1}, \quad 1 \leq t \leq 5$

41-44 Calcule o comprimento da curva.

41. $x = 1 + 3t^2, \quad y = 4 + 2t^3, \quad 0 \leq t \leq 1$

42. $x = e^t + e^{-t}, \quad y = 5 - 2t, \quad 0 \leq t \leq 3$

43. $x = \dfrac{t}{1 + t}, \quad y = \ln(1 + t), \quad 0 \leq t \leq 2$

44. $x = 3 \cos t - \cos 3t, \quad y = 3\,\text{sen}\, t - \text{sen}\, 3t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

45-47 Trace a curva e calcule seu comprimento.

45. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t\,\text{sen}\, t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

46. $x = \cos t + \ln(\text{tg}\, \frac{1}{2} t), \quad y = \text{sen}\, t, \quad \pi/4 \leq t \leq 3\pi/4$

47. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2}, \quad -8 \leq t \leq 3$

48. Ache o comprimento do laço da curva $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$.

49. Use a Regra de Simpson com $n = 6$ para estimar o comprimento da curva $x = t - e^t$, $y = t + e^t$, $-6 \leq t \leq 6$.

50. No Exercício 43, na Seção 10.1, foi pedido que você deduzisse as equações paramétricas $x = 2a \cot g\, \theta$, $y = 2a \operatorname{sen}^2\theta$ para a curva chamada bruxa de Maria Agnesi. Use a Regra de Simpson com $n = 4$ para estimar o comprimento do arco dessa curva dada por $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$.

51-52 Encontre a distância percorrida por uma partícula com posição (x, y) quando t varia em um dado intervalo de tempo. Compare com o comprimento da curva.

51. $x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \cos^2 t, \quad 0 \leq 1 \leq 3\pi$

52. $x = \cos^2 t, \quad y = \cos t, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$

53. Mostre que o comprimento total da elipse $x = a \operatorname{sen} \theta$, $y = b \cos \theta, a > b > 0$, é

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$

onde e é a excentricidade da elipse $\left(e = c/a, \text{com } c = \sqrt{a^2 - b^2}\,\right)$.

54. Calcule o comprimento total da astroide $x = a \cos^3\theta$, $y = \operatorname{sen}^3\theta$ com $a > 0$.

SCA **55.** (a) Trace a **epitrocoide** com equações

$$x = 11 \cos t - 4\cos(11t/2)$$
$$y = 11 \operatorname{sen} t - 4 \operatorname{sen}(11t/2)$$

Qual intervalo do parâmetro fornece a curva completa?

(b) Use seu SCA para calcular o comprimento aproximado dessa curva.

SCA **56.** Uma curva chamada **espiral de Cornu** é definida pelas equações paramétricas

$$x = C(t) = \int_0^t \cos(\pi u^2/2)\, du$$
$$y = S(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(\pi u^2/2)\, du$$

onde C e S são as funções de Fresnel que foram introduzidas no Capítulo 5.

(a) Trace essa curva. O que acontece quando $t \to \infty$ e $t \to -\infty$?

(b) Calcule o comprimento da espiral de Cornu a partir da origem até o ponto com o valor do parâmetro t.

57-58 Escreva, mas não calcule, uma integral que represente a área da superfície obtida pela rotação da curva dada ao redor do eixo x.

57. $x = 1 + te^t, \quad y = (t^2 + 1), \quad 0 \leq t \leq 1$

58. $x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \operatorname{sen} 3t, \quad 0 \leq t \leq \pi/3$

59-61 Encontre a área exata da superfície obtida pela rotação da curva dada em torno do eixo x.

59. $x = t^3, \quad y = t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$

60. $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$

61. $x = a \cos^3\theta, \quad y = a \operatorname{sen}^3\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

62. Trace a curva

$$x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta \qquad y = 2 \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} 2\theta$$

Se essa curva girar em torno do eixo x, calcule a área da superfície resultante. (Use o gráfico para ajudar a encontrar o intervalo correto do parâmetro.)

63. Se a curva

$$x = t + t^3 \qquad y = t - \frac{1}{t^2} \qquad 1 \leq t \leq 2$$

girar em torno do eixo x, estime a área da superfície resultante com precisão de três casas decimais.

64. Se o arco da curva no Exercício 50 girar em torno do eixo x, estime a área da superfície resultante usando a Regra de Simpson com $n = 4$.

65-66 Calcule a área da superfície gerada pela rotação da curva dada em torno do eixo y.

65. $x = 3t^2, \quad y = 2t^3, \quad 0 \leq t \leq 5$

66. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2}, \quad 0 \leq t \leq 1$

67. Se f' for contínua e $f'(t) \neq 0$ para $a \leq t \leq b$, mostre que a curva parametrizada $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, pode ser colocada na forma $y = F(x)$. [*Sugestão*: Mostre que f^{-1} existe.]

68. Use a Fórmula 2 para deduzir a Fórmula 7 a partir da Fórmula 8.2.5, no Volume I, para o caso no qual a curva pode ser representada na forma $y = F(x)$, $a \leq x \leq b$.

69. A **curvatura** no ponto P da curva é definida como

$$\kappa = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$$

onde ϕ é o ângulo de inclinação da reta tangente em P, como mostrado na figura. Então, a curvatura é o valor absoluto da taxa de variação de ϕ em relação ao comprimento de arco. Esta pode ser considerada uma medida da taxa de variação de direção da curva em P e vai ser estudada em mais detalhes no Capítulo 13.

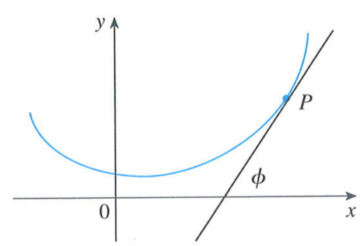
(a) Para a curva parametrizada $x = x(t)$, $y = y(t)$, deduza a fórmula

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

onde os pontos indicam as derivadas em relação a t, assim $\dot{x} = dx/dt$. [*Sugestão*: Use $\phi = \operatorname{tg}^{-1}(dy/dx)$ e a Equação 2 para encontrar $d\phi/dt$. Então, use a Regra da Cadeia para achar $d\phi/ds$.]

(b) Considerando uma curva $y = f(x)$ como a curva parametrizada $x = x$, $y = f(x)$, com o parâmetro x, mostre que a fórmula na parte (a) se torna

$$\kappa = \frac{|d^2y/dx^2|}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}$$



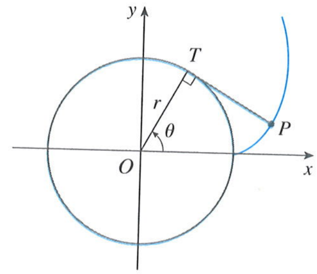
70. (a) Use a fórmula no Exercício 69(b) para encontrar a curvatura da parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$.
(b) Em que ponto essa parábola tem curvatura máxima?

71. Use a fórmula no Exercício 69(a) para calcular a curvatura da cicloide $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ no topo de um dos arcos.

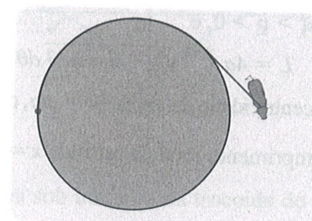
72. (a) Mostre que a curvatura em cada ponto de uma reta é $\kappa = 0$.
(b) Mostre que a curvatura em cada ponto do círculo de raio r é $\kappa = 1/r$.

73. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada **involuta** do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, se a posição inicial de P for $(r, 0)$ e se o parâmetro θ for escolhido como na figura, mostre que as equações paramétricas da involuta são

$$x = r(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$$



74. Uma vaca é amarrada a um silo com raio r por uma corda comprida o suficiente para alcançar apenas o outro lado do silo. Calcule a área disponível para a vaca pastar.



PROJETO DE LABORATÓRIO — CURVAS DE BÉZIER

As **curvas de Bézier** são usadas em Computer-Aided Design (CAD) e têm esse nome em homenagem a Pierre Bézier (1910-1999), matemático francês que trabalhava na indústria automobilística. Uma curva cúbica de Bézier é determinada por quatro *pontos de controle*, $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e $P_3(x_3, y_3)$, e é definida pelas equações paramétricas

$$x = x_0(1-t)^3 + 3x_1t(1-t)^2 + 3x_2t^2(1-t) + x_3t^3$$
$$y = y_0(1-t)^3 + 3y_1t(1-t)^2 + 3y_2t^2(1-t) + x_3t^3$$

para as quais $0 \leqslant t \leqslant 1$. Observe que, quando $t = 0$, temos $(x, y) = (x_0, y_0)$, e quando $t = 1$, obtemos $(x, y) = (x_3, y_3)$; assim, a curva começa em P_0 e termina em P_3.

1. Trace a curva de Bézier com os pontos de controle $P_0(4, 1)$, $P_1(28, 48)$, $P_2(50, 42)$ e $P_3(40, 5)$. Então, no mesmo gráfico, trace os segmentos de reta P_0P_1, P_1P_2 e P_2P_3. (O Exercício 31, na Seção 10.1, mostra como fazer isso.) Observe que os pontos de controle intermediários P_1 e P_2 não estão sobre a curva; a curva começa em P_0, vai em direção a P_1 e P_2 sem alcançá-los e termina em P_3.
2. A partir do gráfico no Problema 1, parece que a tangente em P_0 passa por P_1 e a tangente em P_3 passa por P_2. Demonstre isso.
3. Tente produzir uma curva de Bézier com um laço mudando o segundo ponto de controle no Problema 1.
4. Algumas impressoras a laser usam as curvas de Bézier para representar letras e outros símbolos. Experimente com pontos de controle até você encontrar uma curva de Bézier que dê uma representação razoável da letra C.
5. Formatos mais complexos podem ser representados juntando-se duas ou mais curvas de Bézier. Suponha que a primeira curva de Bézier tenha pontos de controle P_0, P_1, P_2, P_3 e a segunda tenha pontos de controle P_3, P_4, P_5, P_6. Se quisermos que essas duas partes se juntem de modo liso, então as tangentes em P_3 devem coincidir, e os pontos P_2, P_3 e P_4 devem estar nessa reta tangente comum. Usando esse princípio, encontre os pontos de controle para um par de curvas de Bézier que represente a letra S.

10 REVISÃO

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. (a) O que é uma curva parametrizada?
   (b) Como você esboça uma curva parametrizada?
2. (a) Como você calcula a inclinação de uma tangente a uma curva parametrizada?
   (b) Como você calcula a área sob uma curva parametrizada?
3. Escreva uma expressão para cada um dos seguintes itens:
   (a) O comprimento de uma curva parametrizada.
   (b) A área da superfície obtida pela rotação de uma curva parametrizada em torno do eixo x.
4. (a) Use um diagrama para explicar o significado das coordenadas polares (r, θ) de um ponto.
   (b) Escreva as equações para expressar as coordenadas cartesianas (x, y) de um ponto em termos de coordenadas polares.
   (c) Quais equações você usaria para encontrar as coordenadas polares de um ponto se soubesse as coordenadas cartesianas?
5. (a) Como você calcula a inclinação de uma reta tangente a uma curva polar?
   (b) Como você calcula a área de uma região limitada por uma curva polar?
   (c) Como você calcula o comprimento de uma curva polar?
6. (a) Dê uma definição geométrica de uma parábola.
   (b) Escreva uma equação de uma parábola com foco $(0, p)$ e diretriz $y = -p$. O que acontece se o foco for $(p, 0)$ e a diretriz for $x = -p$?
7. (a) Dê uma definição de uma elipse em termos dos focos.
   (b) Escreva uma equação para a elipse com focos $(\pm c, 0)$ e vértices $(\pm a, 0)$.
8. (a) Dê uma definição de uma hipérbole em termos dos focos.
   (b) Escreva uma equação para a hipérbole com os focos $(\pm c, 0)$ e os vértices $(\pm a, 0)$.
   (c) Escreva equações para as assíntotas da hipérbole na parte (b).
9. (a) O que é a excentricidade de uma seção cônica?
   (b) O que você pode dizer sobre a excentricidade se a seção cônica for uma elipse? Uma hipérbole? Uma parábola?
   (c) Escreva uma equação polar para uma seção cônica com excentricidade e e diretriz $x = d$. O que acontece se a diretriz for $x = -d$? $y = d$? $y = -d$?

TESTES VERDADEIRO-FALSO

Determine se a afirmação é falsa ou verdadeira. Se for verdadeira, explique por quê; caso contrário, explique por que ou dê um exemplo que mostre que é falsa.

1. Se a curva parametrizada $x = f(t)$, $y = g(t)$ satisfaz $g'(1) = 0$, então ela tem uma tangente horizontal quando $t = 1$.
2. Se $x = f(t)$ e $y = g(t)$ têm segundas derivadas, então
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}$$
3. O comprimento da curva $x = f(t)$ e $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ é $\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$.
4. Se um ponto é representado por (x, y) em coordenadas cartesianas (onde $x \neq 0$) e (r, θ) em coordenadas polares então $\theta = tg^{-1}(y/x)$.
5. As curvas polares $r = 1 - \text{sen } 2\theta$ e $r = \text{sen } 2\theta - 1$ têm o mesmo gráfico.
6. As equações $r = 2$, $x^2 + y^2 = 4$ e $x = 2 \text{ sen } 3t$, $y = 2 \cos 3t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ têm todas o mesmo gráfico.
7. As equações paramétricas $x = t^2$, $y = t^4$ possuem o mesmo gráfico de $x = t^3$, $y = t^6$.
8. O gráfico de $y^2 = 2y + 3x$ é uma parábola.
9. A reta tangente a uma parábola intercepta a parábola apenas uma vez.
10. Uma hipérbole nunca intercepta sua diretriz.

EXERCÍCIOS

1-4 Esboce a curva parametrizada e elimine o parâmetro para encontrar a equação cartesiana da curva.

1. $x = t^2 + 4t, \quad y = 2 - t, \quad -4 \leq t \leq 1$

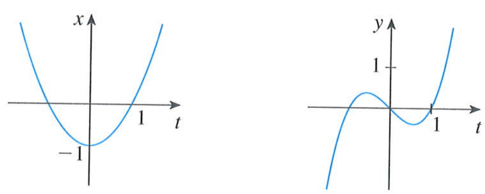
2. $x = 1 + e^{2t}, \quad y = e^t$

3. $x = \cos\theta, \quad y = \sec\theta, 0 \leq \theta < \pi/2$

4. $x = 2\cos\theta, \quad y = 1 + \operatorname{sen}\theta$

5. Escreva os diferentes conjuntos de equações paramétricas para a curva $y = \sqrt{x}$.

6. Use os gráficos de $x = f(t)$ e $y = g(t)$ para esboçar a curva parametrizada $x = f(t)$, $y = g(t)$. Indique com setas a direção na qual a curva é traçada quanto t aumenta.



7. (a) Marque o ponto com coordenadas polares $(4, 2\pi/3)$. A seguir, encontre suas coordendas cartesianas.
(b) As coordenadas cartesianas de um ponto são $(-3, 3)$. Encontre dois conjuntos de coordenadas polares para o ponto.

8. Esboce a região que consiste nos pontos cujas coordenadas polares satisfazem $1 \leq r < 2$ e $\pi/6 \leq \theta \leq 5\pi/6$.

9-16 Esboce a curva polar.

9. $r = 1 - \cos\theta$

10. $r = \operatorname{sen}\theta$

11. $r = \cos 3\theta$

12. $r = 3 + \cos 3\theta$

13. $r = 1 + \cos 2\theta$

14. $r = 2\cos(\theta/2)$

15. $r = \dfrac{3}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

16. $r = \dfrac{3}{2 - 2\cos\theta}$

17-18 Encontre uma equação polar para a curva representada pela equação cartesiana dada.

17. $x + y = 2$

18. $x^2 + y^2 = 2$

19. A curva com equação polar $r = (\operatorname{sen}\theta)/\theta$ é chamada **cocleoide**. Use um gráfico de r como função de θ em coordenadas cartesianas para esboçar a cocleoide manualmente. Então trace-a com uma máquina para verificar seu esboço.

20. Trace a elipse $r = 2/(4 - 3\cos\theta)$ e sua diretriz. Trace também a elipse obtida por sua rotação em torno da origem, de um ângulo de $2\pi/3$.

21-24 Calcule a inclinação da reta tangente à curva dada no ponto correspondente ao valor especificado do parâmetro.

21. $x = \ln t, \quad y = 1 + t^2; \quad t = 1$

22. $x = t^3 + 6t + 1, \quad y = 2t - t^2; \quad t = -1$

23. $r = e^{-\theta}; \quad \theta = \pi$

24. $r = 3 + \cos 3\theta; \quad \theta = \pi/2$

25-26 Calcule dy/dx e d^2y/dx^2.

25. $x = t + \operatorname{sen} t, \quad y = t - \cos t$

26. $x = 1 + t^2, \quad y = t - t^3$

27. Use um gráfico para estimar as coordenadas do ponto mais baixo na curva $x = t^3 - 3t$, $y = t^2 + t + 1$. Então, use o cálculo para calcular as coordenadas exatas.

28. Calcule a área da região limitada pelo laço da curva no Exercício 27.

29. Em que pontos a curva

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t \qquad y = 2a\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen} 2t$$

tem tangentes verticais ou horizontais? Use essa informação para ajudar a esboçar a curva.

30. Calcule a área limitada pela curva no Exercício 29.

31. Calcule a área limitada pela curva $r^2 = 9\cos 5\theta$.

32. Calcule a área limitada pelo laço interno da curva $r = 1 - 3\operatorname{sen}\theta$.

33. Calcule os pontos de intersecção das curvas $r = 2$ e $r = 4\cos\theta$.

34. Encontre os pontos de intersecção das curvas $r = \operatorname{cotg}\theta$ e $r = 2\cos\theta$.

35. Encontre a área da região que está dentro de ambos os círculos $r = 2\operatorname{sen}\theta$ e $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$.

36. Encontre a área da região que está dentro da curva $r = 2 + \cos 2\theta$, mas fora da curva $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$.

37-40 Calcule o comprimento da curva.

37. $x = 3t^2, \quad y = 2t^3, \quad 0 \leq t \leq 2$

38. $x = 2 + 3t, \quad y = \cosh 3t, \quad 0 \leq t \leq 1$

39. $r = 1/\theta, \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi$

40. $r = \operatorname{sen}^3(\theta/3), \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

41-42 Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva dada em torno do eixo x.

41. $x = 4\sqrt{t}, \quad y = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{1}{2t^2}, \quad 1 \leq t \leq 4$

42. $x = 2 + 3t, \quad y = \cosh 3t, \quad 0 \leq t \leq 1$

43. As curvas definidas pelas equações paramétricas

$$x = \frac{t^2 - c}{t^2 + 1} \qquad y = \frac{t(t^2 - c)}{t^2 + 1}$$

são chamadas **estrofides** (do grego, girar, torcer). Investigue como essas curvas mudam quando c varia.

44. Uma família de curvas tem equações polares $r^a = |\text{sen}\, 2\theta|$, onde a é um número positivo. Investigue como essas curvas mudam quando a varia.

45-48 Encontre os focos e os vértices e esboce o gráfico.

45. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ **46.** $4x^2 - y^2 = 16$

47. $6y^2 + x - 36y + 55 = 0$

48. $25x^2 + 4y^2 + 50x - 16y = 59$

49. Encontre uma equação da elipse com foco $(\pm 4, 0)$ e diretriz $(\pm 5, 0)$.

50. Encontre uma equação da hipérbole com focos (2, 1) e vértices $x = -4$.

51. Encontre uma equação da hipérbole com focos $(0, \pm 4)$ e assíntotas $y = \pm 3x$.

52. Encontre uma equação da elipse com focos $(3, \pm 2)$ e eixo principal com comprimento 8.

53. Encontre uma equação para a elipse que compartilhe um vértice e um foco com a parábola $x^2 + y = 100$ e que tenha seu outro foco na origem.

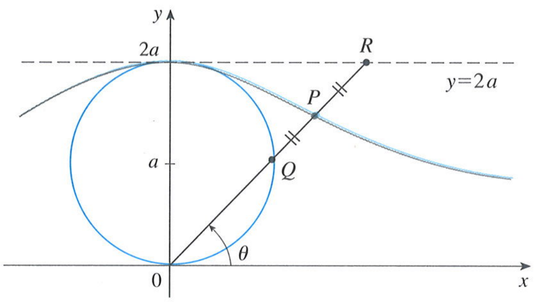
54. Mostre que, se m for qualquer número real, então existem exatamente duas retas de inclinação m tangentes à elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ e suas equações são

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

55. Encontre uma equação polar para a elipse com foco na origem, excentricidade $\frac{1}{3}$ e diretriz com equação $r = 4 \sec \theta$.

56. Mostre que os ângulos entre o eixo polar e as assíntotas da hipérbole $r = ed/(1 - e \cos \theta)$, $e > 1$ são dados por $\cos^{-1}(\pm 1/e)$.

57. Na figura, o círculo de raio a é estacionário, e para cada θ o ponto P é o ponto médio do segmento QR. A curva traçada por P para $0 < \theta < \pi$ é denominada **curva de arco longo**. Encontre as equações paramétricas para essa curva.



1. Uma curva é definida pelas equações paramétricas

$$x = \int_1^t \frac{\cos u}{u}\,du \qquad y = \int_1^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du$$

Calcule o comprimento do arco da curva a partir da origem até o ponto mais próximo onde exista uma reta tangente vertical.

2. (a) Encontre os pontos mais altos e mais baixos sobre a curva $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

(b) Esboce a curva. (Observe que ela é simétrica em relação a ambos os eixos e a ambas as retas $y = \pm x$; assim, inicialmente é suficiente considerar $y \geqslant x \geqslant 0$.)

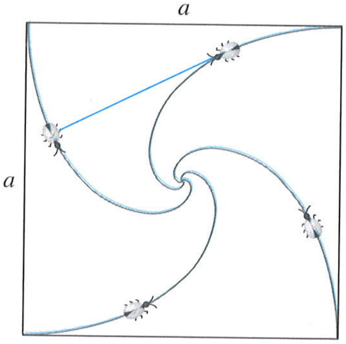
(c) Use as coordenadas polares e um sistema de computação algébrica para encontrar a área dentro da curva.

3. Qual é a menor janela que contém cada membro da família de curvas polares $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$, onde $0 \leqslant c \leqslant 1$? Ilustre sua resposta traçando vários membros da família nesta janela.

4. Quatro insetos são colocados nos quatro cantos de um quadrado com lado de comprimento a. Os insetos andam no sentido anti-horário na mesma velocidade e cada um deles sempre anda diretamente em direção ao próximo inseto. Eles se aproximam do centro do quadrado ao longo de um caminho em espiral.

(a) Encontre a equação polar do caminho do inseto supondo que o polo esteja no centro do quadrado. (Use o fato de que a reta ligando um inseto até o próximo é tangente ao caminho do inseto.)

(b) Encontre a distância percorrida por um inseto quando ele encontra os outros insetos no centro.



5. Uma curva chamada **fólio de Descartes** é definida pelas equações paramétricas

$$x = \frac{3t}{1 + t^3} \qquad y = \frac{3t^2}{1 + t^3}$$

(a) Mostre que, se (a, b) estiverem na curva, então (b, a) também está; isto é, a curva é simétrica em relação à reta $y = x$. Onde a curva intercepta essa reta?

(b) Encontre os pontos na curva onde as retas tangentes são horizontais ou verticais.

(c) Mostre que a reta $y = -x - 1$ é uma assíntota oblíqua.

(d) Esboce a curva.

(e) Mostre que a equação cartesiana dessa curva é $x^3 + y^3 = 3xy$.

(f) Mostre que a equação polar pode ser escrita na forma

$$r = \frac{3 \sec \theta \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg}^3 \theta}$$

(g) Encontre a área da região dentro do laço dessa curva.

(h) Mostre que a área do laço é a mesma que está entre a assíntota e os ramos infinitos da curva. (Use um sistema de computação algébrica para calcular a integral.)

6. Um círculo C de raio $2r$ tem seu centro na origem. Um círculo de raio r rola sem escorregar no sentido anti-horário em torno de C. Um ponto P está localizado em um raio fixado do círculo em rotação a uma distância b de seu centro, $0 < b < r$. [Veja as partes (i) e (ii) da figura.] Seja L a reta do centro de C ao centro do círculo em rotação e seja θ o ângulo que L faz com o eixo positivo.

(a) Usando θ como um parâmetro, mostre que as equações paramétricas da trajetória percorrida por P são

$$x = b \cos 3\theta + 3r \cos \theta \qquad\qquad y = b \operatorname{sen} 3\theta + 3r \operatorname{sen} \theta$$

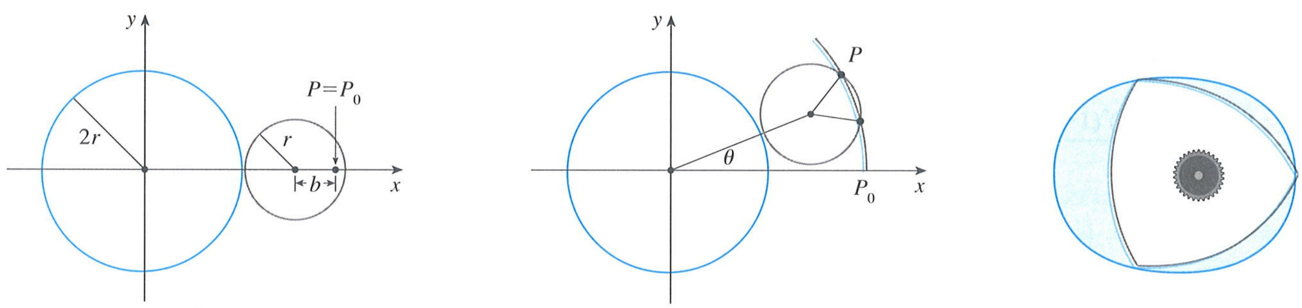
Observação: se $b = 0$, a trajetória é um círculo de raio $3r$; se $b = r$, a trajetória é uma epicicloide. A trajetória percorrida por P para $0 < b < r$ é chamada *epitrocoide*.

(b) Trace a curva para diversos valores de b entre 0 e r.

(c) Mostre que pode ser inscrito um triângulo equilátero na epitrocoide e que seu centroide está no círculo de raio b centrado na origem.

Observação: Este é o princípio do motor de rotação de Wankel. Quando o triângulo equilátero gira com seu vértice na epitrocoide, seu centroide percorre um círculo cujo centro está no centro da curva.

(d) Na maioria dos motores de rotação os lados do triângulo equilátero são substituídos por arcos de círculo centrados no vértice oposto como na parte (iii) da figura (então, o diâmetro do rotor é constante). Mostre que o rotor se ajustará à epitrocoide se $b \leqslant \frac{3}{2}(2 - \sqrt{3})r$.



(i) (ii) (iii)