CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS

USP – MAT 0147 – 2016

1. Condição necessária para um ponto ser mínimo ou máximo local

Seja f uma função de D em $\mathbb{R}$, sendo D um subconjunto qualquer de $\mathbb{R}^2$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Se $f(a.b) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in D$, dizemos que (a, b) é um *ponto de mínimo* de f. Para enfatizar que D é o domínio de f, podemos dizer também que (a, b) é ponto de mínimo de f *em* D. Para enfatizar que a desigualdade é válida para *todos* os pontos do domínio, dizemos às vezes que (a, b) é um ponto de mínimo *global*. Analogamente, trocando-se $\leq$ por $\geq$, define-se *ponto de máximo*.

Se vale a desigualdade $f(a, b) < f(x, y)$ para todo $(x, y) \in D$, dizemos que (a, b) é um ponto de mínimo *estrito* de f. Analogamente define-se ponto de máximo estrito.

Dizemos que $(a, b) \in D$ é um *ponto de mínimo local* de f se: (i) (a, b) for um ponto interior de D (isto é, se existir $\delta > 0$ tal que a bola aberta de raio δ e centro em (a, b), $B_\delta(a, b) = \{(x, y); \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta\}$, esteja contida em D) e (ii) a restrição de f a $B_\delta(a, b)$ tiver um ponto de mínimo em (a, b) (isto é, se $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in B_\delta(a, b)$). Define-se *ponto de máximo local* trocando-se $\leq$ por $\geq$ na última desigualdade.

Se vale a desigualdade $f(a, b) < f(x, y)$ para todo $(x, y) \in B_\delta(a, b)$, dizemos que (a, b) é um ponto de mínimo local *estrito* de f. Analogamente define-se ponto de máximo local estrito.

Se D for um *conjunto aberto*, isto é, se todos os pontos de D forem pontos interiores a D, então todo ponto de mínimo (ou máximo) global é também um ponto de mínimo (ou máximo) local. Exemplos de conjuntos abertos são o próprio $\mathbb{R}^2$, bolas abertas, semiplanos que não incluam a reta da fronteira, ou quadrantes que não incluam os semieixos da fronteira.

Proposição 1. *Se $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, tem um ponto de mínimo local em (a, b) e se as derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ existem, então $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.*

`Demonstração`: Seja $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a, b) \subseteq D$ e $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in B_\delta(a, b)$ (tal δ existe porque f tem um ponto de mínimo local em (a, b)). Se $-\delta < t < \delta$, então $(a+t, b) \in D$ e podemos portanto definir $g(t) = f(a+t, b)$. Segue da hipótese de existência de $f_x(a, b)$ que $g'(0)$ existe:

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = f_x(a, b).$$

Por outro lado, g é uma função definida no intervalo aberto $(-\delta, \delta)$ que tem um mínimo em $t = 0$:

$$g(0) = f(a, b) \leq f(a+t, b) = g(t), \quad \text{para todo} \quad t \in (-\delta, \delta).$$

Aprendemos no Cálculo 1 que, se uma função definida em um intervalo tem um ponto de mínimo no interior do intervalo e se a derivada dessa função existe nesse ponto, então a derivada da função se anula nesse ponto. Este resultado é conhecido como o Teorema de Fermat. Aplicando o Teorema de Fermat a g, concluímos que $f_x(a,b) = g'(0) = 0$, como queríamos.

Analogamente, a função $\tilde{g}(t) = f(a, b+t)$, definida para $t \in (-\delta, \delta)$, tem um ponto de mínimo em $t = 0$ e $\tilde{g}'(0) = f_y(a,b) = 0$. □

Com pequenas adaptações, o mesmo argumento mostra também que, se (a,b) for um ponto de máximo local de f e se existirem $f_x(a,b)$ e $f_y(a.b)$, então $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$.

Um ponto onde as derivadas parciais de primeira ordem de uma função existem e são nulas é chamado de *ponto crítico* dessa função. Um *ponto de sela* é um ponto crítico situado no interior do domínio da função que nem é ponto de mínimo local nem é ponto de máximo local.

As definições e resultados desta seção se estendem da maneira previsível para funções de n variáveis. Os resultados das próximas seções, entretanto, requerem conceitos e ferramentas algébricos mais sofisticados para serem generalizados para funções de n variáveis.

2. O caso dos polinômios de grau 2

Um polinômio de grau 2 de duas variáveis é uma função da forma

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

A, B, C, D, E e F constantes; sendo que pelo menos uma das três constantes A, B e C é diferente de zero. É fácil verificar que $f(0,0) = F$, $f_x(0,0) = D$ e $f_y(0,0) = E$. Um polinômio de grau 2 com um ponto crítico em $(0,0)$ é portanto da forma

$$f(x,y) = f(0,0) + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

O principal objetivo desta seção é discutir que tipo de ponto crítico é $(0,0)$, em função dos valores de A, B e C. Queremos decidir se $(0,0)$ é um máximo local, um mínimo local, ou um ponto de sela. Para isso, devemos discutir o sinal de $f(x,y) - f(0,0) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$. Separando em casos, veremos que é possível determinar completamente quando $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ é positivo, negativo ou nulo. Veremos que: (i) em alguns casos $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ é positivo para todo $(x,y) \neq (0,0)$, ou seja, $(0,0)$ é um ponto de mínimo global estrito; (ii) em alguns casos $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ é negativo para todo $(x,y) \neq (0,0)$, ou seja, $(0,0)$ é um ponto de máximo global estrito; (iii) em alguns casos $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \geq 0$ para todo (x,y) e $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$ para todo (x,y) sobre uma reta que passa pela origem e, portanto, $(0,0)$ é um ponto de mínimo global não-estrito; (iv) em alguns casos $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \leq 0$ para todo (x,y) e $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$ para todo (x,y) sobre uma reta que passa pela origem e, portanto, $(0,0)$ é um ponto de máximo global não-estrito; (v) nos demais casos, $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ assume tanto valores positivos quanto valores negativos em pontos arbitrariamente próximos de $(0,0)$, ou seja, $(0,0)$ é um ponto de sela.

2.1. Suponhamos primeiro que $A \neq 0$. Então temos

$$f(x,y) - f(0,0) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A\left(x^2 + \frac{2B}{A}\,xy\right) + Cy^2 = A\left(x + \frac{B}{A}\,y\right)^2 + Cy^2 - \frac{B^2}{A}\,y^2,$$

logo

$$f(x,y) - f(0,0) = A\left(x + \frac{B}{A}\,y\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}\,y^2. \tag{1}$$

2.1.1. Segue de (1) que, se $AC - B^2 > 0$ e se $A > 0$, então $f(x,y) - f(0,0) \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ou seja, $(0,0)$ é um ponto de mínimo de f. Podemos ver também que $(0,0)$ é um *mínimo estrito*, isto é, $(0,0)$ é o único ponto de mínimo de f; pois, se $f(x,y) = f(0,0)$, então $y = 0$ e $x + \frac{B}{A}y = 0$, logo $(x,y) = (0,0)$. Ou seja, $f(0,0) < f(x,y)$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

2.1.2. Analogamente, também segue de (1) que, se $AC - B^2 > 0$ e se $A < 0$, então $(0,0)$ é um ponto de máximo estrito de f, isto é, $f(0,0) > f(x,y)$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

2.1.3. Novamente usando (1), temos que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t,0) - f(0,0) = At^2 \quad \text{e} \quad f(-\frac{B}{A}\,t, t) - f(0,0) = \frac{AC - B^2}{A}\,t^2.$$

Daí segue que, se $AC - B^2 < 0$ e $A > 0$, então $f(t,0) > f(0,0)$ para todo $t \neq 0$ e $f(-\frac{B}{A}t, t) < f(0,0)$ para todo $t \neq 0$; e, se $AC - B^2 < 0$ e $A < 0$, então $f(t,0) < f(0,0)$ para todo $t \neq 0$ e $f(-\frac{B}{A}t, t) > f(0,0)$ para todo $t \neq 0$. Concluímos que, se $AC - B^2 < 0$ e $A \neq 0$, então existem pontos (x,y) arbitrariamente próximos de $(0,0)$ tais que $f(x,y) > f(0,0)$ e existem também (outros) pontos (x,y) arbitrariamente próximos de $(0,0)$ tais que $f(x,y) < f(0,0)$. Ou seja, $(0,0)$ nem é ponto de máximo local nem de mínimo local de f. Ou seja, $(0,0)$ é um ponto de sela de f.

2.1.4. Suponhamos agora que $A \neq 0$ e $AC - B^2 = 0$; daí:

$$f(x,y) - f(0,0) = A\left(x + \frac{B}{A}\,y\right)^2.$$

Se $A > 0$, então $f(x,y) \geq f(0,0)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = f(0,0)$ se e somente se $Ax + By = 0$. Logo, $(0,0)$ é um ponto de mínimo de f, assim como o são todos os pontos de uma reta passando pela origem. Ou seja, $(0,0)$ é um ponto de mínimo não-estrito. Analogamente concluímos que, se $A < 0$ e $AC - B^2 = 0$, $(0,0)$ é um ponto de máximo não-estrito de f.

2.2. Suponhamos agora que $A = 0$ e, portanto, $f(x,y) - f(0,0) = y(2Bx + Cy)$.

2.2.1. Se $A = 0$ e $B \neq 0$, o plano $\mathbb{R}^2$ fica dividido em quatro setores por duas retas que passam pela origem: $y = 0$ (horizontal) e $x = -\frac{C}{2B}y$ (não-horizontal). Sobre as retas, $f(x,y) = f(0,0)$; em dois dos setores, $f(x,y) > f(0,0)$; nos outros dois setores, $f(x,y) < f(0,0)$. Logo, $(0,0)$ é um ponto de sela. Note que, neste caso, $AC - B^2 = -B^2 < 0$.

2.2.2. Se $A = B = 0$ e $C \neq 0$, então $f(x,y) - f(0,0) = Cy^2$. Se C for positivo, $(0,0)$ é um ponto de mínimo não-estrito de f. Se C for negativo, $(0,0)$ é um ponto de máximo não-estrito. Neste caso, $AC - B^2 = 0$.

2.2.3. Chegamos finalmente ao caso menos interessante: $A = B = C = 0$. Então f é uma função constante e todos os pontos do plano são pontos de máximo e de mínimo.

Vamos agora resumir algumas das nossas conclusões em um teorema.

Teorema 1. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau 2 possuindo um ponto crítico em $(0,0)$,*

$$f(x,y) = f(0,0) + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

e seja $\Delta = AC - B^2$.

(1) *Se $\Delta > 0$ e $A > 0$, então $(0,0)$ é um ponto de mínimo estrito de f.*
(2) *Se $\Delta > 0$ e $A < 0$, então $(0,0)$ é um ponto de máximo estrito de f.*
(3) *Se $\Delta < 0$, então $(0,0)$ é um ponto de sela.*

Como vimos na discussão precedente, podemos dizer mais sobre polinômios de grau 2 do que está dito no enunciado deste teorema. Escolhemos colocar no enunciado deste teorema apenas as afirmações que podem ser generalizadas, substituindo "máximo" e "mínimo" por "máximo local" e "mínimo local", para funções que possuem derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

Ainda não está claro que constantes tomarão o lugar de A, B e C para funções mais gerais. É aqui que entra o Cálculo (até aqui a discussão foi puramente algébrica). As constantes A, B e C são múltiplos das derivadas de segunda ordem de f:

$$A = \frac{f_{xx}(0,0)}{2}, \quad B = \frac{f_{xy}(0,0)}{2} = \frac{f_{yx}(0,0)}{2}, \quad C = \frac{f_{yy}(0,0)}{2}.$$

Temos também que

$$\Delta = \frac{f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2}{4}.$$

Podemos portanto dar o seguinte enunciado alternativo para o Teorema 1:

Teorema 2. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau 2 possuindo um ponto crítico em $(0,0)$.*

(1) *Se $f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 > 0$ e $f_{xx}(0,0) > 0$, então $(0,0)$ é um ponto de mínimo estrito de f.*
(2) *Se $f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 > 0$ e $f_{xx}(0,0) < 0$, então $(0,0)$ é um ponto de máximo estrito de f.*
(3) *Se $f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 < 0$, então $(0,0)$ é um ponto de sela de f.*

Seja agora f um polinômio de grau 2 que tem um ponto crítico em $(a,b) \neq (0,0)$. O polinômio $g(x,y) = f(x+a, y+b)$ satisfaz $g_x(0,0) = f_x(a,b) = 0$, $g_y(0,0) = f_y(a,b) = 0$. Logo, g tem um ponto crítico em $(0,0)$. Para decidir que tipo de ponto crítico de f é (a,b), devemos discutir o sinal de $f(x,y) - f(a,b)$. Como $f(x,y) - f(a,b) = g(x-a, y-b) - g(0,0)$, (a,b) será ponto de mínimo estrito de f se e somente se $(0,0)$ for um ponto de mínimo estrito de g; o mesmo valendo para pontos de máximo estritos ou pontos de sela. Para decidir que tipo de ponto crítico de f é (a,b), podemos portanto aplicar o Teorema 2 para o polinômio g. Notando que

$$f_{xx}(a,b) = g_{xx}(0,0), \quad f_{yy}(a,b) = g_{yy}(0,0) \quad \text{e} \quad f_{xy}(a,b) = g_{xy}(0,0),$$

temos:

Teorema 3. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau 2 possuindo um ponto crítico em (a, b).*

(1) *Se $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 > 0$ e $f_{xx}(a,b) > 0$, então (a,b) é um ponto de mínimo estrito de f.*
(2) *Se $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 > 0$ e $f_{xx}(a,b) < 0$, então (a,b) é um ponto de máximo estrito de f.*
(3) *Se $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 < 0$, então (a,b) é um ponto de sela de f.*

3. O polinômio de Taylor de ordem 2 de uma função de 2 variáveis

O *polinômio de Taylor de ordem 1 em* (a, b) de uma função f que possua derivadas parciais de primeira ordem contínuas em (a, b) é o polinômio

$$P_1(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Já nos deparamos que esse polinômio antes. Seu gráfico é o plano tangente ao gráfico de f em (a, b). Ele é uma "boa aproximação" de f na vizinhança de (a, b) no seguinte sentido. Quando (x, y) tende a (a, b), a diferença $f(x, y) - P_1(x, y)$ tende a zero mais rapidamente do que a distância de (x, y) a (a, b), ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - P_1(a, b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0.$$

Fica como exercício para o leitor verificar que P_1 é o único polinômio P de grau menor do que ou igual a 1 tal que

$$P(a, b) = f(a, b), \quad P_x(a, b) = f_x(a, b) \quad \text{e} \quad P_y(a, b) = f_y(a, b).$$

Dada uma função f que tenha derivadas parciais contínuas de primeira e de segunda ordem em (a, b), definimos o *polinômio de Taylor de ordem 2 de f em* (a, b) como sendo o único polinômio P de grau menor do que ou igual a 2 tal que $P(a, b) = f(a, b)$, $P_x(a, b) = f_x(a, b)$, $P_y(a, b) = f_y(a, b)$, $P_{xx}(a, b) = f_{xx}(a, b)$, $P_{xy}(a, b) = f_{xy}(a, b)$ e $P_{yy}(a, b) = f_{yy}(a, b)$. Fica como exercício para o leitor verificar que esse polinômio, que de agora em diante será denotado por P_2, é dado por

$$P_2(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \frac{1}{2} f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2} f_{yy}(a, b)(y - b)^2.$$

O polinômio P_2 é uma aproximação melhor do que P_1 na vizinhança de (a, b). Quando (x, y) tende a (a, b), a diferença $f(x, y) - P_2(x, y)$ tende a zero mais rapidamente do que *o quadrado* da distância de (x, y) a (a, b);

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - P_2(x, y)}{(x - a)^2 + (y - b)^2} = 0.$$

Nós não iremos usar (nem demonstrar) este fato. Ele é enunciado aqui apenas para motivar os resultados da seção seguinte. Nela vamos provar que, em alguns casos, se f (e portanto também P_2, pois as duas funções têm as mesmas derivadas de primeira ordem em (a, b)) tiver um ponto crítico em (a, b), ele será do mesmo tipo (máximo local, mínimo local ou sela) tanto para f quanto para P_2.

4. Condições suficientes para um ponto crítico ser máximo, mínimo ou sela

Dizemos que uma função $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, é de classe C^2 se f possui derivadas parciais de primeira e de segunda ordem contínuas em D. Vamos agora estender o Teorema 3 para funções de classe C^2, trocando máximo e mínimo globais por máximo e mínimo locais na conclusão. A ideia intuitiva é que as desigualdades que aparecem nas hipóteses e nas conclusões do Teorema 3 são suficientemente robustas para sobreviverem à pequena perturbação local que consiste em trocar f por seu polinômio de Taylor de ordem 2 em (a,b).

Digo isso apenas para motivar. Demonstraremos o Teorema 4 abaixo usando apenas a continuidade das derivadas e a discussão do sinal de formas quadráticas que fizemos na Seção 2, sem precisar apelar para estimativas do valor da diferença entre f e seu polinômio de Taylor de ordem 2.

Vamos precisar também do seguinte resultado sobre funções de uma variável, cuja demonstração incluo aqui, para conveniência do leitor mais interessado.

Proposição 2. *Seja $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$, uma função possuindo derivadas de primeira e de segunda ordem. Se $g'(0) = 0$ e $g''(t) > 0$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$, então $g(0) < g(t)$, para todo $t \in (-\delta, \delta)$, $t \neq 0$.*

`Demonstração`: Vamos provar que $g(t) - g(0) > 0$ primeiro supondo $t > 0$, depois supondo $t < 0$.

Se $0 < t < \delta$, segue do Teorema do Valor Médio que existe c, $0 < c < t$, tal que $g(t) - g(0) = g'(c)\,t$. Como a derivada de g' é positiva em $(-\delta, \delta)$, g' é crescente em $(-\delta, \delta)$. Como $c > 0$, $g'(c) > g'(0) = 0$. Como t e $g'(c)$ são positivos, $g(t) - g(0) = g'(c)\,t > 0$.

Se $-\delta < t < 0$, segue do Teorema do Valor Médio que existe c, $t < c < 0$, tal que $g(0) - g(t) = g'(c)(0 - t) = -g'(c)\,t$. Já vimos que g' é crescente em $(-\delta, \delta)$. Como $c < 0$, $g'(c) < g'(0) = 0$. Como t e $g'(c)$ são negativos, $g(t) - g(0) = g'(c)\,t > 0$. $\square$

Teorema 4. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^2. Suponha que (a,b) é um ponto crítico de f (isto é, $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$) e que (a,b) é um ponto interior de D.*

(1) *Se $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 > 0$ e $f_{xx}(a,b) > 0$, então (a,b) é um ponto de mínimo local estrito de f.*
(2) *Se $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 > 0$ e $f_{xx}(a,b) < 0$, então (a,b) é um ponto de máximo local estrito de f.*
(3) *Se $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 < 0$, então (a,b) é um ponto de sela de f.*

`Demonstração`: Vamos demonstrar primeiro a parte (1) do teorema. Porque f_{xx}, f_{yy} e f_{xy} são contínuas, segue da desigualdade $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b) > 0$ que existe $\delta > 0$ tal que

$$f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 > 0 \quad \text{e} \quad f_{xx}(x,y) < 0, \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in B_\delta(a,b). \tag{2}$$

Vamos provar que $f(x,y) > f(a,b)$ para todo $(x,y) \in B_\delta(a,b)$, $(x,y) \neq (0,0)$.

Dado $(x,y) \in B_\delta(a,b)$, $(x,y) \neq (a,b)$, existem $t_0 \in (-\delta, \delta)$, $t_0 \neq 0$, e $\langle h,k \rangle \in \mathbb{R}^2$, com $h^2 + k^2 = 1$, tais que $(x,y) = (a + th, b + tk)$. Mantendo (x,y) e $\langle h,k \rangle$ fixos por um tempo, definamos $g(t) = f(a + th, b + tk)$, $t \in (-\delta, \delta)$. Note que, porque $\|\langle h,k \rangle\| = 1$, a distância de $(a + th, b + tk)$ a (a,b), para todo $t \in (-\delta, \delta)$, é menor do que δ, ou seja, $(a + th, b + tk) \in B_\delta(a,b)$.

Segue da regra da cadeia que, para todo $t \in (-\delta, \delta)$, temos

$$g'(t) \;=\; f_x(a+th, b+tk)\, h \;+\; f_y(a+th, b+tk)\, k$$

e

$$g''(t) \;=\; f_{xx}(a+th, b+tk)\, h^2 \;+\; 2f_{xy}(a+th, b+tk)\, hk \;+\; f_{yy}(a+th, b+tk)\, k^2.$$

Segue da hipótese de (a, b) ser um ponto crítico de f que $g'(0) \;=\; f_x(a, b)\, h \;+\; f_y(a, b)\, k = 0h + 0k = 0$. Para cada $t \in (-\delta, \delta)$, sejam $A = f_{xx}(a + th, b + tk)$, $B = f_{xy}(a + th, b + tk)$ e $C = f_{yy}(a + th, b + tk)$. Os valores de A, B e C dependem de t, mas não vamos explicitar essa dependência para não sobrecarregar a notação. Segue de (2) que, para cada $t \in (-\delta, \delta)$, $AC - B^2 > 0$ e $A < 0$. Segue então da primeira parte do Teorema 1 aplicado à função $q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ que $g''(t) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 > 0$, para todo $t \in (-\delta, \delta)$, $t \neq 0$.

Sabendo que $g'(0) = 0$ e que $g''(t) > 0$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$, $t \neq 0$, concluímos usando a Proposição 2 que $g(t) > g(0)$, para todo $t \in (-\delta, \delta)$, $t \neq 0$. Em particular, $f(x, y) = g(t_0) > g(0) = f(a, b)$. Como o (x, y) que tomamos no começo deste argumento era um ponto arbitrário de $B_\delta(a, b)$, está provado que $f(x, y) > f(a, b)$ para todo $(x, y) \in B_\delta(a, b)$, o que demonstra a parte (1) do Teorema.

A demonstração da parte (2) do teorema é completamente análoga à da parte (1). Pode ser um bom exercício para o leitor refazer os passos da demonstração da parte (1) verificando as adaptações que devem ser feitas para demonstrar a parte (2) (vai ser preciso também mudar um pouquinho o enunciado e a prova da Proposição 2). Uma saída bem menos trabalhosa é apelar para o seguinte truque. Se f satisfaz as hipóteses da parte (2) do teorema, então $\phi = -f$ satisfaz as hipóteses da parte (1). Logo, para todo $(x, y) \in B_\delta(a, b)$, $(x, y) \neq (a, b)$, temos $-f(a, b) = \phi(a, b) < \phi(x, y) = -f(x, y)$, ou seja, $f(a, b) > f(x, y)$; o que demonstra a parte (2) do teorema.

Suponhamos agora que vale a hipótese da parte (3) do teorema que estamos demonstrando, $f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 < 0$. Pela parte (3) do Teorema 1, a função $q(h, k) = f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2$ tem um ponto de sela em $(0, 0)$. Logo, existem (h_1, k_1) e (h_2, k_2) arbitrariamente próximos de $(0, 0)$ tais que $q(h_1, k_1) < 0$ e $q(h_2, k_2) > 0$. Podemos supor que as distâncias de (h_1, k_1) a $(0, 0)$ e de (h_2, k_2) a $(0, 0)$ são menores do que 1, o que garante que $(a + th_1, b + tk_1)$ e $(a + th_2, ab + tk_2)$ pertencem à bola $B_\delta(a, b)$ se $|t| < \delta$. Lembrando que $B_\delta(a, b)$ está contida no domínio de f, podemos portanto definir, para $t \in (-\delta, \delta)$, $g_1(t) = f(a + th_1, b + tk_1) - f(a, b)$ e $g_2(t) = f(a + th_2, b + tk_2) - f(a, b)$. Tal como na demonstração da parte (1) do teorema, segue da regra da cadeia que g_1 e g_2 possuem derivadas de primeira e de segunda ordem contínuas em $(-\delta, \delta)$ e que

$$g_1'(0) = g_2'(0) = 0, \quad g_1''(0) = q(h_1, k_1) < 0 \quad \text{e} \quad g_2''(0) = q(h_2, k_2) > 0.$$

Como g_1'' e g_2'' são contínuas, $g_1''(t) < 0$ e $g_2''(t) > 0$ para todo t em um intervalo aberto contendo 0. Segue então (veja a Proposição 2) que $g_1(t) = f(a + th_1, b + tk_1) - f(a, b) < 0$ e $g_2(t) = f(a + th_2, b + tk_2) - f(a, b) > 0$ para todo t nesse intervalo aberto que contém 0. Provamos que existem pontos (da forma $(a + th_1, b + tk_1)$) arbitrariamente próximos de (a, b) nos quais o valor de f é menor do que $f(a, b)$ e pontos (da forma $(a + th_2, b + tk_2)$) arbitrariamente próximos de (a, b) nos quais o valor de f é maior do que $f(a, b)$. Ou seja, provamos que (a, b) é um ponto de sela de f. $\square$

`Observação 1`. Se $f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b) > 0$, então $f_{xx}(a, b) \neq 0$. Ou seja, se em um ponto crítico (a, b) for satisfeita a hipótese $f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b) > 0$, então ou (a, b) é um mínimo local estrito ou é um máximo local estrito. Além do mais, se essa hipótese for satisfeita, também $f_{yy}(a, b) \neq 0$ e $f_{yy}(a, b)$ tem sinal igual ao de $f_{xx}(a, b)$.

`Observação 2`. Nada se pode afirma em geral quando f tem um ponto crítico em (a,b) e $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b) = 0$. A função $f(x,y) = x^3y^3$ tem um ponto crítico em $(0,0)$, $f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0) = 0$, e f tem um ponto de sela em $(0,0)$. Já a função $g(x,y) = x^4 + y^4$, tem um ponto crítico em $(0,0)$, $g_{xx}(0,0)g_{yy}(0,0) - g_{xy}(0,0) = 0$, e g tem um ponto de mínimo estrito em $(0,0)$

`Observação 3`. Nós usamos na demonstração acima a seguinte propriedade da forma quadrática $q(h,k) = f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2$: se $g(t) = f(a+th, b+tk)$, $g''(0) = q(h,k)$.

`Exemplo`. O único ponto crítico de $f(x,y) = x^2 + 5y^2(1+x)^3$ é $(0,0)$, que é um mínimo local, mas não é um mínimo global.