EQUAÇÃO DO PLANO TANGENTE

USP – MAT 0147 – 2016
NOTAS BASEADAS NAS AULAS DE 21 E 23 DE SETEMBRO

Seja $f(x,y)$ uma função que possui derivadas parcias no ponto (a,b), que denotamos por $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$.

A reta r descrita pelo sistema

$$\left\{\begin{array}{l} z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) \\ y = b \end{array}\right. \tag{1}$$

é tangente ao gráfico de f; mais precisamente, ela é tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano $y = b$. Esta reta não é "vertical" (ou seja, não é paralela ao eixo z) pois é tangente ao gráfico de uma função (de uma variável) derivável no ponto de tangência.

A reta s dada por

$$\left\{\begin{array}{l} z = f(a,b) + f_y(a,b)(y-b) \\ x = a \end{array}\right. \tag{2}$$

é tangente ao gráfico de f; mais precisamente, ela é tangente à curva de interseção do gráfico de f com o plano $x = a$. Pela mesma razão de r, s também não é vertical.

As duas retas se cruzam no ponto $(a, b, f(a,b))$. Sendo concorrentes determinam um plano π, o único plano que contém as duas retas simultaneamente. A reta r não é vertical e está contida no plano vertical $y = b$. A reta s não é vertical e está contida no plano vertical $x = a$. Além disso, os planos $x = a$ e $y = b$ são mutuamente ortogonais. Segue então que o plano π não é vertical.

Vamos agora determinar a equação de π, usando dois métodos diferentes. Depois discutimos uma questão delicada: π é mesmo tangente ao gráfico de f, como insinuado pelo título desta nota de aula?

Método sem vetores.
O plano π contém a interseção das retas r e s, que é o ponto $(a, b, f(a,b))$. O plano π tem portanto uma equação do tipo

$$A(x-a) + B(y-b) + C[(z - f(a,b)] = 0,$$

para certas constantes A, B e C. Como o plano π não é vertical, temos $C \neq 0$. Definindo $\alpha = -A/C$ e $\beta = -B/C$, essa equação pode ser então re-escrita como

$$z = f(a,b) + \alpha(x-a) + \beta(y-b). \tag{3}$$

A reta r é a interseção de π com o plano $y = b$. Substituindo $y = b$ em (3), vemos que r pode então ser descrita como o conjunto de soluções do sistema

$$\left\{\begin{array}{l} z = f(a,b) + \alpha(x-a) \\ y = b \end{array}\right.$$

Comparando esse sistema com (1), vemos que necessariamente teremos $\alpha = f_x(a,b)$.

Por um argumento análogo, usando s no lugar de r, concluímos que $\beta = f_y(a,b)$. A equação de π é, portanto,

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b). \tag{4}$$

Método usando produto vetorial.
Lembrando que $f_x(a,b)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $g(x) = f(x,b)$ no ponto $x = a$, vemos que o vetor $\vec{\mathbf{v}} = \langle 1, 0, f_x(a,b)\rangle$ é paralelo à reta r. Analogamente, temos que o vetor $\vec{\mathbf{u}} = \langle 0, 1, f_y(a,b)\rangle$ é paralelo a s. O vetor $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ é portanto perpendicular a π. Um cálculo simples mostra que

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \langle f_x(a,b), f_y(a,b), -1\rangle.$$

A equação do plano π, que passa por $(a,b,f(a,b))$ e é perpendicular a $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$, é portanto

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b),$$

como já havíamos concluído por outro método.

π é mesmo tangente ao gráfico de f?
Se existir um plano que mereça ser chamado de "plano tangente" ao gráfico de $f(x,y)$ no ponto $(a,b,f(a,b))$, ele com certeza conterá as retas r e s definidas acima. Os cálculos que fizemos mostram portanto que, se existir um "plano tangente", a equação (4) será uma equação desse plano. Para se concluir que o plano de equação (4) é de fato tangente ao gráfico de f, uma hipótese mais forte do que a mera existência das derivadas parciais precisa ser feita: é preciso supor que f seja "diferenciável" em (a,b), um conceito que será estudado nas próximas aulas. Para "provar" que, se f é diferenciável, então (4) é tangente ao seu gráfico vamos é preciso, antes de mais nada, traduzir em termos analíticos a noção geométrica de tangência.

Vamos exemplificar isso em um caso particular: $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, $(a,b) = (1,1)$. Temos $f_x(x,y) = -2x$, $f_y(x,y) = -2y$, $f_x(1,1) = f_y(1,1) = -2$ e $f(1,1) = 2$. Usando a fórmula geral (4), vemos que o "candidato" a plano tangente a gráfico de f, $z = 4 - x^2 - y^2$, é o plano π de equação $2x + 2y + z = 6$, ou seja, é o plano π que passa pelo ponto $(1,1,2)$ e é perpendicular ao vetor $\langle 2,2,1\rangle$. O que vamos fazer para mostrar que π é tangente ao gráfico de f em $(1,1,2)$ é mostrar que qualquer curva derivável contida no gráfico de f que passa em $(1,1,2)$ tem tangente perpendicular a $\langle 2,2,1\rangle$ em $(1,1,2)$. Para tanto, consideremos uma curva parametrizada $(x(t),y(t),z(t))$ contida no gráfico de f que passa em $(1,1,2)$. Sem perda de generalidade, digamos que $(x(0),y(0),z(0)) = (1,1,2)$. Como a curva está no gráfico, as funções de uma variável $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ satisfazem

$$z(t) = 4 - x(t)^2 - y(t)^2.$$

Essa identidade pode ser derivada usando a regra da cadeia do Cálculo 1, o que nos leva a:

$$z'(t) = -2x(t)x'(t) - 2y(t)y'(t).$$

Fazendo $t = 0$, vem:

$$z'(0) = -2x(0)x'(0) - 2y(0)y'(0) = -2x'(0) - 2y'(0), \quad \text{ou seja} \quad \langle 2,2,1\rangle \cdot \langle x'(0), y'(0), z'(0)\rangle = 0,$$

ou seja, o vetor tangente $\langle x'(0), y'(0), z'(0)\rangle$ é perpendicular ao vetor normal de π.

Veremos mais tarde, usando a regra da cadeia para funções de várias variáveis, que essa propriedade, exemplificada neste exemplo particular, é satisfeita por qualquer função diferenciável.

Uma condição suficiente, mas não necessária, para que f seja diferenciável em (a,b) é que as derivadas parciais de f estejam definidas em uma vizinhança de (a,b) e sejam contínuas em (a,b).