MAT 0146 - Cálculo 1 para Economia

3^a Prova - 20 de junho de 2016

Questão 1 (1 pt) *Seja* $f(x) = \displaystyle\int_2^{x^3} \frac{1}{\sqrt{\ln t}}\, dt,\ x > 1$. *Calcule* $f'(x)$.

`Solução`

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra da Cadeia, obtemos:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln x^3}} \cdot 3x^2$$

para todo $x > 1$.

Questão 2 (2 pts) *Calcule* $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx$.

`Solução`

Integrando por partes com $u = x^2$ e $dv = \cos x\, dx$, obtemos:

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx = x^2 \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \operatorname{sen} x\, dx = -2\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\, dx.$$

Integrando por partes com $u = x$ e $dv = \operatorname{sen} x\, dx$, obtemos:

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\, dx = -\ x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\, dx = \pi + \ \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Daí:

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx = -2\pi$$

Questão 3 (2 pts) *Mostre que* $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}\, dx < \frac{1}{2}$.

`Solução por comparação`

Para todo $x > 1$, temos $x^2 + 1 > x^2$, logo $(x^2+1)^{1/2} > (x^2)^{1/2} = x$, logo $(x^2+1)^{3/2} > x^3 > 0$, logo

$$0 < \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} < \frac{1}{x^3},$$

logo

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}\, dx < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} x^{-3}\, dx = \lim_{M\to\infty} \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^{M} = -\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

`Cálculo do valor exato`

Substituindo na integral indefinida

$$x = \tan\theta, \quad dx = \sec^2\theta\, d\theta, \quad (1+x^2)^{3/2} = (\sqrt{1+\tan^2\theta})^3 = \sec^3\theta,$$

segue que:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}\, dx = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta}\, d\theta = \int \cos\theta\, d\theta = \operatorname{sen}\theta + C.$$

Para voltar para a variável x, observamos que só estamos interessados em valores positivos de x (pois a integral que queremos calcular é para $x \geq 1$). Podemos portanto supor que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, intervalo em que todas as funções trigonométricas que aparecem aqui são positivas. Daí, obtemos

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2\theta}} = \sqrt{1 - \frac{1}{1+\tan^2\theta}} = \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

e, daí,

$$\int_1^M \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}\, dx = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|_1^M = \frac{M}{\sqrt{M^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e, daí,

$$\int_1^\infty \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}\, dx = \lim_{M\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{M^2}}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{3}{10} < \frac{1}{2}.$$

Questão 4 (3 pts) (a) *Calcule* $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx$. (b) *Calcule, ilustrando seu raciocínio com uma figura, a área da região do plano que consiste dos pontos simultaneamente interiores aos círculos de raio 1 centrados nos pontos* $(0,0)$ *e* $(0,1)$.

`Solução`

(a) Fazendo $x = \operatorname{sen}\theta$, $dx = \cos\theta\, d\theta$, notando que

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \implies 0 \leq \operatorname{sen}\theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \cos\theta,$$

vem:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

(b) Um quarto da área A pedida é igual ao valor da integral menos a área do retângulo de lados $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (isto pode ser entendido com a ajuda de uma figura). Logo

$$A = 4 \cdot \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Questão 5 (2 pts) *Calcule* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + n^{10}}{n^{11}}$.

`Solução`: Seja $f(x) = x^{10}$. Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left.\frac{x^{11}}{11}\right|_0^1 = \frac{1}{11}.$$

Por outro lado, essa integral é o limite, quando $n \to \infty$, das somas de Riemann

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x, \quad x_j = \frac{j}{n},\ j = 1, \cdots, n,\ \Delta x = \frac{1}{n}.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + n^{10}}{n^{11}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{x} \right)^{10} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{11}.$$