MAT 0147 - Cálculo 2 para Economia

3^a Prova - 28 de novembro de 2016

Questão 1) Determine o máximo e o mínimo de $f(x,y) = x^4 + y^2$ em $D = \{(x,y);\, x^2 + 2y^2 \le 1\}$.

`Solução:` As derivadas parciais $f_x(x,y) = 4x^3$ e $f_y(x,y) = 2y$ são simultaneamente nulas apenas para $(x,y) = (0,0)$. O ponto $(0,0)$ é o (único) ponto de mínimo de f em D pois $f(0,0) = 0 < x^4 + y^2 = f(x,y)$, para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Como não há outros pontos críticos de f além de $(0,0)$, o máximo de f em D, que existe porque f é contínua e D é compacto, tem de ocorrer na fronteira de D, o conjunto dos pontos onde se verifica $x^2 + 2y^2 = 1$.

Para encontrar o máximo de f em $x^2 + 2y^2 = 1$, podemos usar o método dos multiplicadores de Lagrange (para funções de duas variáveis com uma restrição). Seja $g(x,y) = x^2 + 2y^2$. O gradiente de g, $\nabla g(x,y) = \langle 2x, 4y\rangle$, nunca se anula se $g(x,y) = 1$. Logo, o máximo de f na curva de nível $g(x,y) = 1$ necessariamente ocorrerá em um ponto onde ∇f seja um múltiplo de ∇g. Esses pontos podem ser determinados resolvendo o seguinte sistema de três equações e três incógnitas.

$$(1) \qquad \begin{cases} 4x^3 = \lambda\, 2x \\ 2y = \lambda\, 4y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^3 = \lambda x \\ y = 2\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

No caso em que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, este sistema é equivalente a

$$\begin{cases} 2x^2 = \lambda \\ 1 = 2\lambda \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{4} \\ \lambda = \frac{1}{2} \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{4} \\ y^2 = \frac{3}{8} \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Obtemos assim quatro soluções com $x \neq 0$ e $y \neq 0$: $(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{8}})$, $(\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{8}})$, $(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{8}})$ e $(-\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{8}})$. Nesses quatro pontos, f vale $\frac{7}{16}$.

Devemos agora procurar soluções de (1) com $x = 0$ ou $y = 0$.

Se $x = 0$, segue de $x^2 + 2y^2 = 1$ que $y^2 = \frac{1}{2}$. As outras duas equações são satisfeitas com $\lambda = \frac{1}{2}$.

Se $y = 0$, segue de $x^2 + 2y^2 = 1$ que $x = 1$ ou $x = -1$. A equação $y = 2\lambda y$ é satisfeita para qualquer λ e a equação $2x^3 = \lambda x$ determina que $\lambda = \frac{1}{2}$.

Obtemos assim mais quatro candidatos a ponto de máximo de f na fronteira de D: $(1,0)$, $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-1,0)$ e $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Nos dois pontos em que $x^2 = 1$, f vale 1. Nos outros dois, f vale $\frac{1}{2}$

Comparando os valores de f nos 8 candidatos a pontos extremais, concluímos que o maior valor que f assume em D é 1 e que esse valor é assumido nos pontos $(1,0)$ e $(-1,0)$.

Questão 2) Determine o valor de $f(x,y) = (x^2+y^2)\,e^{-x^2-2y^2}$ em seus pontos de sela.

`Sugestão`: Use a informação dada no gráfico ao final do texto.

`Solução:` Temos $f_x(x,y) = [2x+(x^2+y^2)\,(-2x)]\,e^{-x^2-2y^2}$ e $f_y(x,y) = [2y+(x^2+y^2)\,(-4y)]\,e^{-x^2-2y^2}$. Como $e^{-x^2-2y^2} \neq 0$ para todo (x,y), segue que os pontos críticos de f são as soluções do seguinte sistema.

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2x(x^2+y^2) & = & 0 \\ 2y - 4y(x^2+y^2) & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x(x^2+y^2) & = & x \\ 2y(x^2+y^2) & = & y \end{array} \right.$$

No caso em que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, este sistema é equivalente a $\left\{ \begin{array}{rcl} (x^2+y^2) & = & 1 \\ 2(x^2+y^2) & = & 1 \end{array} \right.$, que não tem solução.

Todas as soluções do sistema (2) satisfazem portanto $x = 0$ ou $y = 0$.

Se $x = 0$, a primeira equação é satisfeita para qualquer y e a segunda é equivalente a $2y^3 = 2y$, que tem três soluções: $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$ e $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Se $y = 0$, a segunda equação é satisfeita para qualquer x e a primeira é equivalente a $x^3 = x$, que tem três soluções: $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$.

Concluímos assim que f tem cinco pontos críticos: $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Temos os seguintes valores para f nos pontos críticos:

$$f(0,0) = 0, \quad f(-1,0) = f(1,0) = \frac{1}{e}, \quad f(0,\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2e}.$$

O maior desses valores é $\dfrac{1}{e}$. Analisando o gráfico, vemos que os pontos de sela são $(0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$, nos quais f vale $\frac{1}{2e}$.

Questão 3) Considere as seguintes funções, definidas para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) = x^2 - 2x - yz, \quad g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad h(x,y,z) = y + z.$$

Seja C a interseção das superfícies $g(x,y,z) = 6$ e $h(x,y,z) = 2$.

(a) Mostre que $\nabla g(x,y,z) \times \nabla h(x,y,z) \neq \langle 0,0,0 \rangle$, para todo $(x,y,z) \in C$.

(b) Determine um vetor $\mathbf{u}$ que tenha norma 1 e seja tangente a C no ponto $(2,1,1)$

(c) Calcule a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(2,1,1)$.

`Solução:`

(a) $\nabla g(x,y,x) = \langle 2x, 2y, 2z\rangle$, $\nabla h(x,y,z) = \langle 0,1,1\rangle$,

$$\nabla g(x,y,z) \times \nabla h(x,y,z) = 2\langle y-z, -x, x\rangle.$$

Assim, $\nabla g(x,y,z) \times \nabla h(x,y,z) = \langle 0,0,0\rangle$ se e somente se $y = z$ e $x = 0$. Se $y = z$ e $x = 0$, então $(x,y,z) = (0,y,y)$ não pertence a C porque, se pertencesse, teríamos $x^2+y^2+z^2 = 2y^2 = 6$ e $y+z = 2y = 2$, duas equações que não são simultaneamente satisfeitas para nenhum valor de y. Logo,

$$\nabla g(x,y,z) \times \nabla h(x,y,z) \neq \langle 0,0,0\rangle$$

para todo $(x,y,z) \in C$.

(b) $\nabla g(2,1,1) \times \nabla h(2,1,1) = 2\langle 0,-2,2\rangle$ é tangente a C em $(2,1,1)$. Logo,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \nabla g(2,1,1) \times \nabla h(2,1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0,-1,1\rangle$$

é tangente a C e tem norma (módulo) igual a 1

(c) $\nabla f(x,y,z) = \langle 2x-2, -z, -y\rangle$, $\nabla f(2,1,1) = \langle 2,-1,-1\rangle$,

$$D_{\mathbf{u}} f(2,1,1) \;=\; \nabla f(2,1,1)\cdot \mathbf{u} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\langle 2,-1,-1\rangle \cdot \langle 0,-1,1\rangle \;=\; 0.$$

Questão 4) Considere as seguintes funções, definidas para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) = x^2 - 2x - yz, \quad g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2, \quad h(x,y,z) = y+z.$$

Seja C a interseção das superfícies $g(x,y,z) = 6$ e $h(x,y,z) = 2$. Determine o máximo e o mínimo de f em C.

`Solução:` Como f é contínua e C é um conjunto compacto, f tem máximo e tem mínimo em C. Vimos na terceira questão que $\nabla g(x,y,z) \times \nabla h(x,y,z) \neq \langle 0,0,0\rangle$ para todo $(x,y,z) \in C$. Logo, os pontos de máximo e de mínimo de f em C são pontos onde o gradiente de f é combinação linear do gradiente de g e do gradiente de h; ou seja são pontos (x,y,z) para os quais existem λ e μ tais que $\nabla f(x,y,z) = \lambda\,\nabla g(x,y,z) + \mu\,\nabla h(x,y,z)$. Esses pontos podem ser encontrados resolvendo-se o sistema

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 2x-2 &=& 2\lambda x \\ -z &=& 2\lambda y + \mu \\ -y &=& 2\lambda z + \mu \\ x^2+y^2+z^2 &=& 6 \\ y+z &=& 2 \end{array}\right. .$$

Comparando a segunda e a terceira equações deste sistema, podemos "eliminar o μ". O que queremos, portanto, é equivalente a resolver o sistema seguinte (se houvesse interesse, poderíamos determinar μ usando uma das equações descartadas):

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 2x-2 &=& 2\lambda x \\ 2\lambda y + z &=& 2\lambda z + y \\ x^2+y^2+z^2 &=& 6 \\ y+z &=& 2 \end{array}\right. . \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x-2 &=& 2\lambda x \\ 2\lambda(y-z) &=& y-z \\ x^2+y^2+z^2 &=& 6 \\ y+z &=& 2 \end{array}\right. .$$

A segunda equação é satisfeita se e somente se $y = z$ ou $\lambda = \frac{1}{2}$. Nossa estratégia para resolver (4) será obter todas as soluções satisfazendo $y = z$ e em seguida obter todas as soluções satisfazendo $\lambda = \frac{1}{2}$.

Se $y = z$, a primeira, a terceira e a quarta equações de (4) serão satisfeitas se e somente se

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-2 &=& 2\lambda x \\ x^2+2y^2 &=& 6 \\ 2y &=& 2 \end{array}\right. . \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x-2 &=& 2\lambda x \\ x^2+2 &=& 6 \\ y &=& 1 \end{array}\right. . \iff \left\{\begin{array}{l} 2x-2 = 2\lambda x \\ x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ y = 1 \end{array}\right. .$$

(Como os dois valores que achamos para x são não-nulos, o valor de λ fica determinado, para cada valor de x, pela primeira equação.) Obtivemos assim dois candidatos a ponto de máximo ou mínimo satisfazendo $y = z$: $(2, 1, 1)$ e $(-2, 1, 1)$.

Se $\lambda = \frac{1}{2}$, a primeira, a terceira e a quarta equações de (4) serão satisfeitas se e somente se

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-2 &=& x \\ x^2+y^2+z^2 &=& 6 \\ y+z &=& 2 \end{array}\right. . \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2 \\ y^2+z^2 &=& 2 \\ y+z &=& 2 \end{array}\right. . \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2 \\ y^2+(2-y)^2 &=& 2 \\ z &=& 2-y \end{array}\right. . \iff (x, y, z) = (2, 1, 1).$$

Ou seja, considerando o caso $\lambda = \frac{1}{2}$, obtivemos apenas uma solução, que já havia sido encontrada no caso $y = z$.

O método dos multiplicadores de Lagrange (para 3 variáveis e 2 restrições) implica portanto que o máximo e o mínimo de f ocorrem em $\{(2, 1, 1), (-2, 1, 1)\}$. Como $f(2, 1, 1) = -1 < 7 = f(-2, 1, 1)$, segue que $(2, 1, 1)$ é o ponto de mínimo e $(-2, 1, 1)$ é o ponto de máximo.

```
In[12]:= Plot3D[E^(-x^2 - 2*y^2)*(x^2 + y^2), {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```

Out[12]=

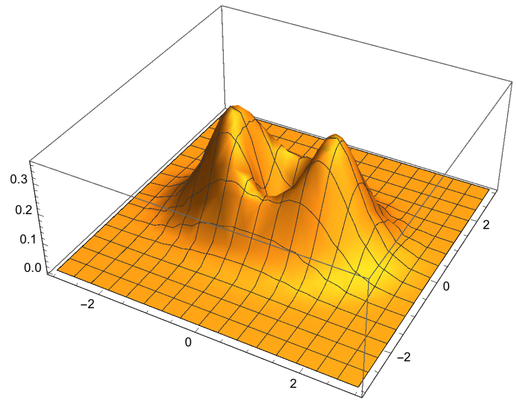

Figura 1