MAT 2110 - Cálculo I para Química - 3^a Prova - 22 de junho de 2015

Questão 1 (a) Faça um esboço da região R que consiste dos pontos do plano cartesiano que ficam abaixo da parábola $y = x^2 + 1$, acima do eixo dos x, e que satisfazem $0 \leq x \leq 1$.

(b) Calcule o volume V do sólido que se obtém ao girar em torno do eixo dos x a região R.

`Solução`: (b) $V = \pi \int_0^1 (x^2+1)^2\,dx = \pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right)\Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{28\pi}{15}.$

Questão 2 (a) Mostre que $[\ln(\sec x + \tan x)]' = \sec x$.

(b) Calcule o comprimento L do gráfico de $f(x) = \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

`Solução`: (a) $[\ln(\sec x + \tan x)]' = \dfrac{\sec x \cdot \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} = \dfrac{\sec x \cdot (\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} = \sec x$

(b)

$$L = \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + \left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)^2}\,dx = \int_0^{\pi/3} \sqrt{\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}\,dx = \int_0^{\pi/3} \sec x\,dx = \ln(\sec x + \tan x)|_0^{\pi/3} = \ln(2+\sqrt{3}).$$

Questão 3 Dada uma função contínua f com domínio $\mathbb{R}$, seja $y(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^{x-t} - e^{t-x}}{2} f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}$.

(a) Calcule $y'(x)$. (b) Calcule $y''(x)$. (c) Mostre que $y''(x) - y(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, e que $y(0) = y'(0) = 0$.

`Solução`: Podemos reescrever $y(x)$ como

$$y(x) = \frac{e^x}{2} \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt - \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x e^t f(t)\,dt.$$

Usando a regra de derivação do produto e o teorema fundamental do cálculo, vem:

$$y'(x) = \frac{e^x}{2} \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt + \frac{e^x e^{-x} f(x)}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x e^t f(t)\,dt - \frac{e^{-x} e^x f(x)}{2} = \frac{e^x}{2} \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt + \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x e^t f(t)\,dt,$$

e, daí,

$$y''(x) = \frac{e^x}{2} \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt + \frac{e^x e^{-x} f(x)}{2} - \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x e^t f(t)\,dt + \frac{e^{-x} e^x f(x)}{2} = f(x) + \frac{e^x}{2} \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt - \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x e^t f(t)\,dt,$$

ou seja, $y''(x) = f(x) + y(x)$, como queríamos.

Substituindo-se $x = 0$ nas fórmulas obtidas acima, é imediato verificar que $y(0) = y'(0) = 0$.

Questão 4 (3 pts)

(a) Mostre que, para todo $x \geq 0$, temos $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + E(x)$, em que $|E(x)| \leq \frac{1}{8} x^2$.

(b) Encontre um valor aproximado de $\int_0^{1/2} \sqrt{1+t^4}\,dt$, com erro menor do que $\frac{1}{20.000}$.

`Solução`: Seja $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x > -1$. Temos:

$$f'(x) = \frac{1}{2(1+x)^{1/2}}, \qquad f(0) = 1, \quad f'(0) = \frac{1}{2}.$$

O polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de $x = 0$ é, portanto, $P_1(x) = 1 + \frac{x}{2}$. Para estimar o valor absoluto da diferença $f(x) - P_1(x)$, observemos que

$$|f''(x)| = \frac{1}{4(1+x)^{3/2}} \leq \frac{1}{4}, \quad \text{para todo} \quad x \geq 0.$$

Daí,

$$\left|\sqrt{1+x} - \left(1+\frac{x}{2}\right)\right| \leq \frac{\frac{1}{4}x^2}{2} = \frac{x^2}{8}, \quad \text{para todo} \quad x \geq 0.$$

Substituindo $x = t^4$ na estimativa acima, vem:

$$\left|\sqrt{1+t^4} - \left(1+\frac{t^4}{2!}\right)\right| \leq \frac{t^8}{8}, \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Daí,

$$\left|\int_0^{1/2} \sqrt{1+t^4}\,dt - \int_0^{1/2}\left(1+\frac{t^4}{2!}\right)dt\right| = \left|\int_0^{1/2}\left[\sqrt{1+t^4}\,dt - \left(1+\frac{t^4}{2!}\right)\right]dt\right| \leq$$

$$\leq \int_0^{1/2}\left|\sqrt{1+t^4}\,dt - \left(1+\frac{t^4}{2!}\right)\right|dt \leq \int_0^{1/2}\frac{t^8}{8}\,dt = \left(\frac{t^9}{72}\right)\Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{512\cdot 72}.$$

Como

$$\int_0^{1/2}\left(1+\frac{t^4}{2!}\right)dt = \left(t+\frac{t^5}{10}\right)\Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^5\cdot 10} = \frac{1}{2}+\frac{1}{320} = \frac{161}{320},$$

temos

$$\left|\int_0^{x}\sqrt{1+t^4}\,dt - \frac{161}{320}\right| \leq \frac{1}{512\cdot 72} < \frac{1}{35.000}.$$

Questão 4 alternativa (3 pts)

(a) Mostre que $0 < \left(1+\frac{x}{2}\right) - \sqrt{1+x} < \frac{x^2}{8}$, para todo $x > 0$.

(b) Mostre que $\frac{161}{320} - \frac{1}{36.000} < \int_0^{1/2}\sqrt{1+t^4}\,dt < \frac{161}{320}$.

`Solução`: (a) Sejam $f(x) = 1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}$ e $g(x) = \frac{x^2}{8}$. Como $f(0) = g(0) = 0$, para provar que $0 < f(x) < g(x)$ para todo $x > 0$, é suficiente provar que $0 < f'(x) < g'(x)$ para todo $x > 0$. Temos

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+x)^{1/2}}, \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{x}{4}.$$

Como $f'(0) = g'(0) = 0$, para provar que $0 < f'(x) < g'(x)$ para todo $x > 0$, é suficiente provar que $0 < f''(x) < g''(x)$ para todo $x > 0$. Temos

$$f''(x) = \frac{1}{4(1+x)^{3/2}}, \text{ que é claramente menor do que } g''(x) = \frac{1}{4}, \text{ para todo } x > 0,$$

como queríamos mostrar.

(b) Substituindo $x = t^4$ na desigualdade obtida no item (a) e, em seguida, integrando de 0 a 1/2, vem:

$$0 < \int_0^{1/2}\left[\left(1+\frac{t^4}{2}\right) - \sqrt{1+t^4}\right]dt < \int_0^{1/2}\frac{t^8}{8}\,dt.$$

Já vimos na solução da Questão 4 que

$$\int_0^{1/2}\left(1+\frac{t^4}{2}\right)dt = \frac{161}{320} \quad \text{e} \quad \int_0^{1/2}\frac{t^8}{8}\,dt = \frac{1}{512\cdot 72}.$$

Daí,

$$0 < \frac{161}{320} - \int_0^{1/2}\sqrt{1+t^4}\,dt < \frac{1}{512\cdot 72},$$

ou seja,

$$\frac{161}{320} - \frac{1}{512\cdot 72} < \int_0^{1/2}\sqrt{1+t^4}\,dt < \frac{161}{320},$$

o que demonstra uma afirmação ligeiramente mais forte do que a que foi pedida, pois $512\cdot 72 > 36.000$.