MAT 0146 - Cálculo 1 para Economia

2^a Prova - 9 de maio de 2016

Questão 1 (1,5 pt). Calcule: (a) $\lim_{x\to\infty}(x\ln x - x^2)$, (b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^x}{e^{x^2}}$.

Solução: (a) Vamos usar que $x\ln x - x^2 = x^2\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right)$. Usando a regra de l'Hospital (caso $\frac{\infty}{\infty}$), temos $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ e, portanto, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -1$. Como $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$, segue que

$$\lim_{x\to\infty}(x\ln x - x^2) = \lim_{x\to\infty}\left[x^2\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right)\right] = -\infty.$$

(b) Como $\frac{x^x}{e^{x^2}} = \frac{e^{x\ln x}}{e^{x^2}} = e^{x\ln x - x^2}$ e, como visto no item (a), $\lim_{x\to\infty}(x\ln x - x^2) = -\infty$, segue que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln x - x^2} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0.$$

Questão 2 (1 pt). Mostre que $(1+x)^{1/3} < 1 + \frac{1}{3}x$, para todo $x > 0$.

Solução: Sejam $f(x) = (1+x)^{1/3}$ e $g(x) = 1 + \frac{x}{3}$. Queremos mostrar que $f(x) < g(x)$ para todo $x > 0$. Como $f(0) = g(0) = 1$, é suficiente mostrar que $f'(x) < g'(x)$ para todo $x > 0$. Isto é simples de verificar:

$$\text{para todo } x > 0, \text{ temos } f'(x) = \frac{1}{3(1+x)^{2/3}} < \frac{1}{3} = g'(x), \text{ pois } (1+x)^{2/3} > 1.$$

Questão 3 (3 pts). Considere $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$. (a) Determine os intervalos em que f' é positiva ou negativa. (b) Determine os intervalos em que f'' é positiva ou negativa. (c) Assinale no gráfico dado na página 3 o ponto crítico e o ponto de inflexão de f. (d) Determine o menor valor que $f(x)$ assume quando x assume valores reais positivos.

Solução: (a) Temos $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2}(x^3 - 1)$, para todo $x \neq 0$. Daí, $f'(x) > 0$ se $x > 1$ (pois, nesse caso, $x^3 - 1 > 0$ e $x^2 > 0$) e $f'(x) < 0$ se $x < 1$ e $x \neq 0$ (pois, nesse caso, $x^3 - 1 < 0$ e $x^2 > 0$). Assim, f' é positiva no intervalo $(1, +\infty)$ e é negativa nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, 1)$.

(b) Temos $f''(x) = 2 + \frac{4}{x^3} = \frac{2(x^3+2)}{x^3}$, $x \neq 0$. O único ponto onde f'' se anula é, portanto, $x = -\sqrt[3]{2}$. Daí, $f''(x) > 0$ se $x > 0$ (pois, nesse caso, $x^3 + 2$ e x^3 são positivos) ou se $x < -\sqrt[3]{2}$ (pois, nesse caso, $x^3 + 2$ e x^3 são negativos). E temos $f''(x) < 0$ se $-\sqrt[3]{2} < x < 0$ (pois, nesse caso, $x^3 + 2$ é positivo e x^3 é negativo). Assim, f'' é positiva nos intervalos $(-\infty, -\sqrt[3]{2})$ e $(0, +\infty)$ e é negativa em $(-\sqrt[3]{2}, 0)$.

(c) O único ponto crítico de f é $x = 1$. O único ponto de inflexão é $x = -\sqrt[3]{2}$. No ponto de inflexão, f se anula: $f(-\sqrt[3]{2}) = (-\sqrt[3]{2})^2 + \frac{2}{-\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}} = 0$.

(d) f é descrescente em $(0, 1]$ e é crescente em $[1, +\infty)$. Logo, $x = 1$ é o ponto de mínimo de f em $(0, +\infty)$. O menor valor que f assume em $(0, +\infty)$ é, portanto, $f(1) = 1^2 + \frac{2}{1} = 3$.

Questão 4 (2,5 pts). Determine a abscissa dos pontos da curva $x^3 + xy^2 = x^2 - y^2$ que têm reta tangente horizontal (veja a figura na página 4).

`Solução`: Derivando implicitamente $y = y(x)$, vem:

$$3x^2 + y^2 + 2xyy' = 2x - 2yy'. \tag{1}$$

Substituindo $y' = 0$ nesta equação, obtemos uma condição necessária para que a curva tenha tangente horizontal num ponto (x, y):

$$3x^2 + y^2 = 2x; \quad \text{ou seja,} \quad y^2 = 2x - 3x^2.$$

Substituindo isto na equação da curva, $x^3 + xy^2 = x^2 - y^2$, vem:

$$x^3 + x(2x - 3x^2) = x^2 - (2x - 3x^2); \text{ ou seja, } x^3 + 2x^2 - 3x^3 = x^2 - 2x + 3x^2.$$

Ou seja, num ponto (x, y) da curva em que a tangente seja horizontal, x necessariamente satisfaz

$$2x^3 + 2x^2 - 2x = 0 \iff x(x^2 + x - 1) = 0.$$

Os valores de x que satisfazem esta condição necessária são $x = 0$, $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Para decidir quais desses "candidatos" são de fato pontos em que a tangente à curva é horizontal, podemos (ou, ao menos aqui, *devemos*) apelar para um argumento gráfico. Próximo a $x = 0$, vemos, na figura dada, que a curva não é o gráfico de uma função e, aparentemente, tem duas tangentes não horizontais. Vemos também que a curva não possui pontos de abscissa $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Os dois pontos, visíveis no gráfico, que têm tangente horizontal têm portanto abscissa $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (que, aliás é um número maior do que $\frac{1}{2}$ e menor do que 1, como se vê na figura).

`Observação adicional`: Sem apelar para o gráfico, podemos provar que todos os pontos da curva têm abscissa x satisfazendo $-1 < x \leq 1$. De fato, os pontos da curva satisfazem $(1 + x)y^2 = x^2(1 - x)$. Como y^2 e x^2 nunca são negativos, segue que, ou $1 - x = 0$, ou $1 - x$ e $1 + x$ têm o mesmo sinal, ou seja, $-1 < x < 1$.

Questão 5 (2 pts). O custo de produção[1] de uma caixa retangular sem tampa, cuja base é um quadrado de lado x e cujas faces laterais têm altura y, é dada por $C(x, y) = x^2 + xy$. Deseja-se minimizar o custo de uma tal caixa que tenha volume igual a 2. Mostre que o mínimo é atingido quando $y = 2x$.

`Solução`: Como o volume, dado por $V = x^2y$, é igual a 2, temos $y = 2/x^2$ e, portanto, o custo é dado por

$$C(x) = x^2 + \frac{2}{x}, \ x > 0.$$

Esta função foi estudada na Questão 3. Lá vimos que seu mínimo é atingido em $x = 1$. Como $y = 2/x^2$, segue que $y = 2$ quando $x = 1$; ou seja, as dimensões da caixa que minimiza o custo satisfazem $y = 2x$.

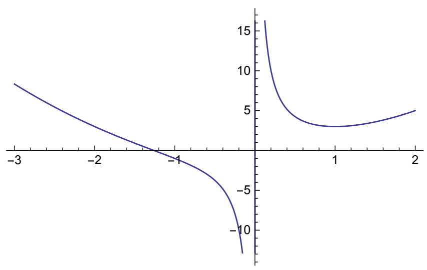
[1]Apenas a título de motivação: este problema modela a situação em que o custo de produção por unidade de área do fundo da caixa é quatro vezes maior do que o das faces laterais.

In[5]:= **plot (x^2+2/x) (x=-3 to x=2)**

Input interpretation:

plot	$x^2 + \frac{2}{x}$	$x = -3$ to 2

Plot:



min max

WolframAlpha

```
In[2]:= {WolframAlpha["plot x^2+2/x", {{"Plot", 1}, "Input"}],
         WolframAlpha["plot x^2+2/x", {{"Plot", 2}, "Input"}]}
```

Out[2]= $\{\text{HoldComplete}[\text{Plot}[\frac{2}{x} + x^2, \{x, -1.3, 1.3\}]],$

$\text{HoldComplete}[\text{Plot}[\frac{2}{x} + x^2, \{x, -7.6, 7.6\}]]\}$

FIGURA 1

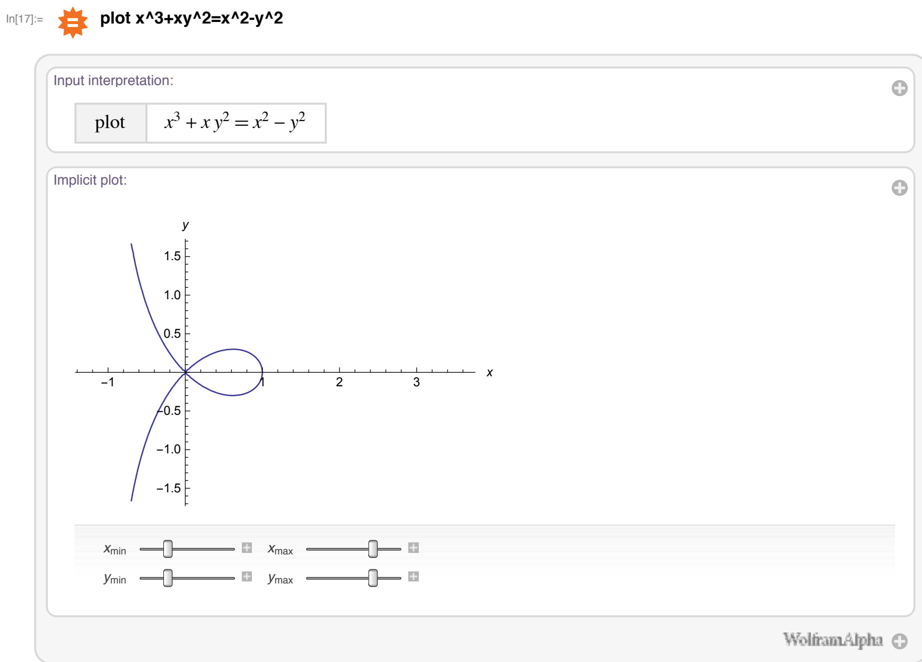

In[17]:=
plot x^3+xy^2=x^2-y^2
Input interpretation:
plot
$x^3 + x\,y^2 = x^2 - y^2$
Implicit plot:
y
1.5
1.0
0.5
x
−1
1
2
3
−0.5
−1.0
−1.5
x_{min}
x_{max}
y_{min}
y_{max}
WolframAlpha

FIGURA 2