MAT 0147 - Cálculo 2 para Economia - Turma 1 (diurno)

2^a Prova - 17 de outubro de 2016

Questão 1. (2 pts)

Mostre que a função $u(x,y) = (x^2+y^2)^{3/2}$ satisfaz a equação diferencial $u_{xx} + u_{yy} = 9u^{1/3}$.

`Solução`: $u_x = \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{1/2}2x = 3x(x^2+y^2)^{1/2}$.

$u_{xx} = 3(x^2+y^2)^{1/2} + 3x\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}2x = 3(x^2+y^2)^{1/2} + 3x^2(x^2+y^2)^{-1/2}$.

Analogamente: $u_{yy} = 3(x^2+y^2)^{1/2} + 3y^2(x^2+y^2)^{-1/2}$.

Logo:

$$u_{xx} + u_{yy} = 6(x^2+y^2)^{1/2} + 3x^2(x^2+y^2)^{-1/2} + 3y^2(x^2+y^2)^{-1/2}$$

$$= 6(x^2+y^2)^{1/2} + 3(x^2+y^2)(x^2+y^2)^{-1/2} = 9(x^2+y^2)^{1/2} = 9u^{1/3}.$$

Questão 2. (2 pts) Considere a função $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$.

(a) Esboce em uma figura os conjuntos de nível $\{(x,y);\ f(x,y) = k\}$, para $k = -1, 0, 1$.

(b) Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Justifique.

`Solução`: (a) Para $(x,y) \neq (0,0)$, temos:

$$\frac{2x^2y}{x^4+y^2} = 1 \iff y^2 - 2x^2y + x^4 = 0 \iff (y-x^2)^2 = 0 \iff y = x^2$$

$$\frac{2x^2y}{x^4+y^2} = -1 \iff y^2 + 2x^2y + x^4 = 0 \iff (y+x^2)^2 = 0 \iff y = -x^2$$

$$\frac{2x^2y}{x^4+y^2} = 0 \iff 2x^2y = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } y = 0)$$

Logo $\{(x,y);\ f(x,y) = -1\}$ é a parabóla $y = -x^2$ menos a origem $(0,0)$; $\{(x,y);\ f(x,y) = 0\}$ é a união dos eixos coordenados menos $(0,0)$; $\{(x,y);\ f(x,y) = 1\}$ é a parábola $y = x^2$ menos $(0,0)$.

(b) Se (x,y) se aproximar de $(0,0)$ ao longo da parábola $y = x^2$, $f(x,y)$ tenderá a 1 (será na verdade constante e igual a 1); enquanto que, se a aproximação se der ao longo da parábola $y = -x^2$, $f(x,y)$ tenderá a -1. Se o limite existisse e fosse igual a L, teríamos $1 = L = -1$, o que é absurdo. Logo, o limite não existe.

Questão 3. (3 pts)

Seja $f(x,y)$ uma função que possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Defina $g(u,v) = f(u^2+v^2, 2uv)$. Dado que $f_x(4,0) = f_y(4,0) = f_{xy}(4,0) = 1$, calcule: (a) $g_u(2,0)$, (b) $g_{uv}(2,0)$.

`Solução`: Pela regra da cadeia, temos, para todo (u,v):

$$g_u(u,v) = f_x(u^2+v^2, 2uv)\cdot 2u + f_y(u^2+v^2, 2uv)\cdot 2v,$$

$$g_{uv}(u,v) = [f_{xx}(u^2+v^2, 2uv)\cdot 2v + f_{xy}(u^2+v^2, 2uv)\cdot 2u]\cdot 2u$$

$$+2f_y(u^2+v^2, 2uv) + [f_{yx}(u^2+v^2, 2uv)\cdot 2v + f_{yy}(u^2+v^2, 2uv)\cdot 2u]\cdot 2v.$$

Substituindo $(u,v) = (2,0)$, vem:

$$g_u(2,0) = f_x(4,0)\cdot 4 = 4,$$

$$g_{uv}(2,0) = 16 f_{xy}(4,0) + 2 f_y(4,0) = 18.$$

Questão 4. (3 pts) Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{10/3}}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(a) Calcule $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.

(b) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

(c) O gráfico de f tem um plano tangente em $(0,0,0)$? Em caso afirmativo, qual é a sua equação?

`Solução`: (a) Como $f(x,0) = x^{4/3}$ para todo x, temos $f_x(x,0) = \frac{4}{3}x^{1/3}$ para todo x, logo $f_x(0,0) = 0$. Como $f(0,y) = 0$ para todo y, temos $f_y(0,y) = 0$ para todo y, logo $f_y(0,0) = 0$.

(b) Temos $f(h,k) - [f(0,0) + f_x(0,0)h + f_y(0,0)k] = f(h,k)$. Logo, para provar que f é diferenciável em $(0,0)$ devemos provar que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{(h^2+k^2)^{1/2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^{10/3}}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 0.$$

Temos:

$$0 \le \left| \frac{h^{10/3}}{(h^2+k^2)^{3/2}} \right| = \left(\frac{h^2}{h^2+k^2} \right)^{3/2} |h|^{\frac{1}{3}} \le |h|^{1/3}.$$

Como $|h|^{1/2}$ tende a zero quando (h,k) tende a zero, segue por confronto que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{h^{10/3}}{(h^2+k^2)^{3/2}} \right| = 0$$

e, portanto,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^{10/3}}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 0,$$

como queríamos.

Uma maneira alternativa de mostrar que f é diferenciável em $(0,0)$ é mostrar que existem $\epsilon_1(h,k)$ e $\epsilon_2(h,k)$, ambas tendendo a zero quando (h,k) tende a $(0,0)$, tais que

$$f(h,k) - [f(0,0) + f_x(0,0)h + f_y(0,0)k] = h\,\epsilon_1(h,k) + k\,\epsilon_2(h,k).$$

Temos

$$f(h,k) - [f(0,0) + f_x(0,0)h + f_y(0,0)k] = \frac{h^{10/3}}{h^2+k^2} = h\,\frac{h^{7/3}}{h^2+k^2} + k \cdot 0.$$

Basta então tomar

$$\epsilon_1(h,k) = \frac{h^{7/3}}{h^2+k^2}, \quad \epsilon_2(h,k) = 0$$

e mostrar que $\epsilon_1(h,k)$ tende a zero quando (h,k) tende a $(0,0)$. Isto segue da estimativa

$$\left|\frac{h^{7/3}}{h^2+k^2}\right| = \frac{h^2}{h^2+k^2}|h|^{1/3} \leq |h|^{1/3}.$$

Uma terceira maneira de fazer seria mostrando que as derivadas parciais f_x e f_y são contínuas em $(0,0)$.

(c) Sim, o gráfico de f tem um plano tangente em $(0,0,0)$, porque f é diferenciável em $(0,0)$ e $f(0,0) = 0$. Como $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, a equação do plano tangente é $z = 0$.