MAT 0221 - Cálculo Diferencial e Integral IV

Turma 46 (Estatística e Aplicada)

2^a Prova - 29 de outubro de 2012

Questão 1: (2 pts) Resolva os dois PVIs abaixo, explicitando o domínio maximal da solução.

$$\text{(a)} \begin{cases} xy' + 2y = x \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} xy' + 2y = x \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

Solução: Multiplicando a equação diferencial por x, vem $x^2y' + 2xy = x^2$. O primeiro membro desta equação é igual a $(x^2y)'$. Logo a equação diferencial é equivalente, em intervalos que não contenham 0, a

$$x^2y = \frac{x^3}{3} + C \iff y = \frac{x}{3} + \frac{C}{x^2},$$

onde C é uma constante real. A condição inicial do item (a) é satisfeita se e somente se $C = 2/3$ e a do item (b) se e somente se $C = 4/3$. As soluções dos dois PVIs são portanto

$$y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3x^2},\ x \in (0, +\infty) \quad \text{e} \quad y = \frac{x}{3} + \frac{4}{3x^2},\ x \in (-\infty, 0),$$

respectivamente.

Questão 2: (2,5 pts) (a) Justifique a seguinte afirmação: se y é uma solução de $y' = y + e^x y^2$ tal que $y(x_0) \neq 0$ para algum x_0, então necessariamente $y(x) \neq 0$ para todo x no domínio de y.

(b) Resolva o PVI $\begin{cases} y' = y + e^x y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$, explicitando o domínio maximal da solução. Sugestão: faça $z = 1/y$.

Solução: A função $f(x, y) = y + e^x y^2$, definida em $\mathbb{R}^2$, é de classe C^∞. Assim, em particular, f satisfaz as hipóteses do teorema de existência e unicidade: f é contínua, e f_y existe e é contínua. Se y é uma solução da equação diferencial $y' = y + e^x y^2$ definida em um domínio I contendo x_1 e se $y(x_1) = 0$ então, a única solução do PVI $\begin{cases} y' = y + e^x y^2 \\ y(x_1) = 0 \end{cases}$ é a função identicamente nula (definida em $\mathbb{R}$). Em particular, $y(x) = 0$ para todo $x \in I$. Isto prova que qualquer solução da equação diferencial que se anule em um ponto anula-se também em todos os demais pontos do seu domínio. Isto demonstra a afirmação do item (a).

A solução y do PVI do item (b), sendo diferente de zero em 0, é diferente de zero em todos os pontos do seu domínio. Faz sentido portanto definir $z = 1/y$. Pela regra da cadeia, $z' = -y'/y^2$.

De novo porque y nunca se anula, podemos dividir a equação diferencial por y^2, que fica equivalente a

$$-z' = \frac{y'}{y^2} = \frac{1}{y} + e^x = z + e^x.$$

Como $z(0) = 1/y(0) = 1$, segue que z é a solução do PVI

$$\begin{cases} z' + z = -e^x \\ z(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

A EDO linear em (1) tem fator integrante e^x e é portanto equivalente a

$$(e^x z)' = -e^{2x} \iff e^x z = -\frac{e^{2x}}{2} + C \iff z = -\frac{e^x}{2} + Ce^{-x}$$

A condição inicial de (1) é satisfeita se e somente se $C = 3/2$. Logo

$$z = -\frac{e^x}{2} + \frac{3e^{-x}}{2}, \quad \text{logo} \quad y = \frac{1}{-\frac{e^x}{2} + \frac{3e^{-x}}{2}} = \frac{2e^x}{3 - e^{2x}}.$$

Questão 3: (3 pts) (a) Verifique que $\mu(x, y) = x^{-2}y^{-2}$ é um fator integrante para a equação diferencial

$$(x^2y^3 - 1) + (x^3y^2 - \frac{2x}{y})y' = 0.$$

(b) Ache ψ tal que todas as soluções da equação acima sejam dadas implicitamente por $\psi(x, y) = C$, C constante.

(c) Resolva o PVI $\begin{cases} (x^2y^3 - 1) + (x^3y^2 - \frac{2x}{y})y' = 0 \\ y(1) = -1 \end{cases}$, explicitando o domínio maximal da solução.

Solução (a)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y^3 - 1}{x^2y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y - \frac{1}{x^2y^2}\right) = 1 + \frac{2}{x^2y^3}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3y^2 - \frac{2x}{y}}{x^2y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - \frac{2}{xy^3}\right) = 1 + \frac{2}{x^2y^3}$$

(b) Procuramos ψ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y - \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = x - \frac{2}{xy^3}$$

Primitivando uma dessas duas igualdades, obtemos uma função que satisfaz a outra:

$$\psi(x, y) = xy + \frac{1}{xy^2}.$$

(c) Como $\psi(1, -1) = 0$, segue que a solução do PVI é dada implicitamente por

$$xy + \frac{1}{xy^2} = 0.$$

Ou seja,

$$y = -x^{-2/3}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Questão 4: (3 pts) Decida se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes, justificando sua resposta.

(1) Se y é solução do PVI $\begin{cases} y' = y^{4/5} \\ y(0) = 0 \end{cases}$, então necessariamente y é a função identicamente nula.

(2) Se y é solução do PVI $\begin{cases} y' = y^{5/4} \\ y(0) = 0 \end{cases}$, então necessariamente y é a função identicamente nula.

(3) O PVI $\begin{cases} y' + (\ln x)y = \frac{1}{x-2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ tem uma única solução definida no intervalo $(0, 2)$.

Solução

(1) Falsa. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^{4/5}} = 5y^{1/5} = x + C$. Tomando $C = 0$ vemos que $y = (x/5)^5$ é uma solução do PVI que só se anula em 0.

(2) Verdadeira. O segundo membro da equação diferencial é uma função de classe C^1. Logo, a solução do PVI é única; isto é, a função nula é a única solução do PVI.

(3) Verdadeira. Se p e q são funções contínuas definidas em um intervalo aberto I, se $x_0 \in I$ e se $y_0 \in \mathbb{R}$, sabemos que o PVI $\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ tem uma única solução definida em I. As funções $p(x) = \ln x$ e $q(x) = \frac{1}{x-2}$ são contínuas no intervalo aberto $(0, 2)$. Logo, o PVI dado tem uma única solução no intervalo $(0, 2)$.