MAT 0147 - Cálculo 2 para Economia

1^a Prova - 31 de agosto de 2016

Questão 1. (2 pts) Sejam r_1 e r_2 as retas parametrizadas, respectivamente, por

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \quad , t \in \mathbb{R}, \\ z = t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = s \\ y = 2 - 2s \quad , s \in \mathbb{R}. \\ z = s \end{cases}$$

(a) Mostre que r_1 e r_2 são *concorrentes* (isto é, têm um ponto em comum).

(b) Determine o cosseno do ângulo agudo formado por r_1 e r_2.

`Solução`: (a) Fazendo $t = \frac{1}{2}$ e $s = \frac{1}{2}$ obtemos o mesmo ponto, $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$, que pertence portanto à interseção de r_1 e r_2. (b) Os vetores diretores de r_1 e de r_2 são, respectivamente, $\overrightarrow{\mathbf{v_1}} = \langle 1, 2, 1\rangle$ e $\overrightarrow{\mathbf{v_2}} = \langle 1, -2, 1\rangle$. O cosseno do ângulo agudo formado por r_1 e r_2 é igual a

$$\frac{|\overrightarrow{\mathbf{v_1}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v_2}}|}{|\overrightarrow{\mathbf{v_1}}|\,|\overrightarrow{\mathbf{v_2}}|} = \frac{|1 - 4 + 1|}{(\sqrt{1 + 4 + 1})^2} = \frac{1}{3}.$$

Questão 2. (2 pts)

Seja π_1 o plano que passa pelo ponto $(2, 1, 0)$ e é paralelo ao plano π_2 de equação $x + 4y - 3z = 1$.

(a) Determine a equação de π_1.

(b) Determine as coordenadas do ponto de interseção com π_2 da reta perpendicular a π_2 que passa por $(2, 1, 0)$.

`Solução`: (a) Sendo paralelos π_1 e π_2, e sendo $\langle 1, 4, -3\rangle$ perpendicular a π_2, tem-se que $\langle 1, 4, -3\rangle$ é também perpendicular a π_1. Assim, a equação de π_1 é $x + 4y - 3z = d$, para alguma constante d. Determina-se o valor de d impondo-se que o ponto $(2, 1, 0)$ satisfaça a equação: $2 + 4 - 0 = d$. Assim, a equação de π_1 é $x + 4y - 3z = 6$.

(b) Qualquer reta perpendicular a π_2 é paralela ao vetor normal $\langle 1, 4, -3\rangle$. Assim,

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 4t \quad , \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = -3t \end{cases}$$

são equações paramétricas da reta perpendicular a π_2 que passa por $(2, 1, 0)$. O ponto dessa reta que pertence ao π_2 é o ponto da forma $(2 + t, 1 + 4t, -3t)$ que satisfaz a equação de π_2:

$$(2 + t) + 4(1 + 4t) - 3(-3t) = 1 \iff 26t + 6 = 1 \iff t = -\frac{5}{26}.$$

Ou seja, o ponto procurado é

$$\left(2 - \frac{5}{26}, 1 - \frac{4 \cdot 5}{26}, \frac{3 \cdot 5}{26}\right) = \left(\frac{47}{26}, \frac{6}{26}, \frac{15}{26}\right).$$

Questão 3) (3 pts) Considere a curva parametrizada $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$, $t \neq -1$.

(a) Para que valores de t a curva tem uma reta tangente vertical ou horizontal?

(b) Determine a equação da reta tangente à curva no ponto correspondente a $t = \frac{1}{2}$

(c) Indique, sobre a figura dada, a reta cuja equação foi determinada no item (b).

`Solução:` (a) Temos:

$$x'(t) = \frac{3(1+t^3) - 3t \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3 - 6t^3}{(1+t^3)^2} = 0 \iff t = 2^{-1/3}$$

e

$$y'(t) = \frac{6t(1+t^3) - 3t^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{t(6-3t^3)}{(1+t^3)^2} = 0 \iff t = 0 \text{ ou } t = 2^{1/3}.$$

Para $t = 0$ ou $t = 2^{1/3}$, a reta tangente é horizontal, pois $x'(0) \neq 0 \neq x'(2^{1/3})$ e $y'(0) = 0 = y'(2^{1/3})$. Para $t = 2^{-1/3}$, a reta tangente é vertical, pois $x'(2^{-1/3}) = 0$ e $y'(2^{-1/3}) \neq 0$.

`Observação:` Ao contrário do que sugere a figura, a curva não tem uma reta tangente vertical no ponto $(0,0)$. O que se vê como uma "chegada"vertical da curva à origem é o reflexo do fato de $x(t)$ e $y(t)$ tenderem a zero quando t tende a $+\infty$ ou a $-\infty$

(b) Temos $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. O coeficiente angular da reta tangente à curva em $(x(\frac{1}{2}), y(\frac{1}{2})) = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ é portanto

$$\frac{y'(\frac{1}{2})}{x'(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{2}(2 - \frac{1}{8})}{1 - \frac{2}{8}} = \frac{5}{4}$$

e a equação da reta tangente é

$$y - \frac{2}{3} = \frac{5}{4}\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

ou, equivalentemente, $5x - 4y = 4$.

(c) A reta encontrada no item (b) tangencia a curva em um ponto que fica um pouco abaixo e um pouco à esquerda do ponto de tangente vertical.

Questão 4) (3 pts) Esboce, em uma figura plana, a curva de interseção do hiperboloide elíptico $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$ com: (a) o plano $z = 1$, (b) o plano $x = 1$.

`Solução:`

(a) A interseção da superfície com o plano $z = 1$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - z^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2 \\ z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Isto é uma elipse ("horizontal") centrada na origem com semieixos $\sqrt{2}$ e 1.

(b) A interseção da superfície com o plano $x = 1$ são as soluções do sistema

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - z^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y^2 = z^2 \\ x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = y\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad z = -y\sqrt{2} \\ x = 1 \end{cases}.$$

Isto é um par de retas passando pela origem, com coeficientes angulares $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.

In[11]:=
```
ContourPlot3D[-1 + x^2 + 2 * y^2 - z^2 == 0, {x, -5.5, 5.5}, {y, -4, 4}, {z, -5, 5}]
```

Out[11]=

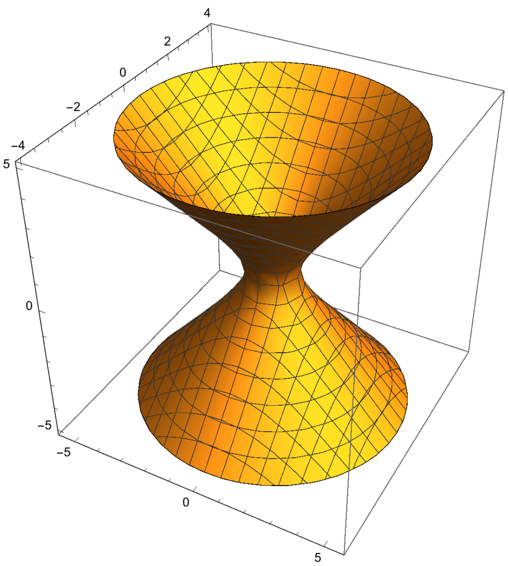

Figura 1