MAT 0221 - Cálculo Diferencial e Integral IV

Turma 46 (Estatística e Aplicada)

1^a Prova - 17 de setembro de 2012

Questão 1: (2,5 pts) Determine se convergem absolutamente, se convergem condicionalmente ou se divergem as séries

$$\text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n(\ln n)^n}.$$

Questão 2: (3 pts) (a) Mostre que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^{3n+3}}{x^3+1}\,dx = 0$.

(b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} \left[\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,dx - \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{(-1)^n}{3n+1}\right)\right] = 0$.

(c) Conclua que $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} + \cdots = \int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,dx$.

Questão 3: (2,5 pts) Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ converge absolutamente, converge condicionalmente ou diverge?

Questão 4: (3 pts) (a) Mostre que $\lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right)\right] = \frac{\ln 2}{2}$.

(b) Mostre que $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\ln 2}{2}$.

Dica para a Questão 2: $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \frac{a^{n+1}}{1-a}$, se $a \neq 1$.

Dica para a Questão 4: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma$, sendo γ uma constante satisfazendo $\frac{1}{2} < \gamma < 1$.

Questão Extra: (a) Mostre que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^{4n+4}}{x^4+1}\,dx = 0$. (b) Mostre que $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.