MAT 2127 - Cálculo 2 para Química

1^a Prova - 2 de setembro de 2015

Questão 1 (3,5 pts) Considere a curva parametrizada $\gamma(t) = (t^3 - 2t, t^2 - t)$, $-2 \leq t \leq 2$.

(a) Ache os pontos de interseção da imagem de γ com os eixos coordenados.

(b) Ache os pontos em que a tangente à curva é horizontal ou vertical.

(c) Ache as equações das duas retas tangentes à curva em seu ponto de autointerseção.

`Solução:` (a) $x(t) = t^3 - 2t$ se anula se, e somente se, $t = 0$, $t = \sqrt{2}$ ou $t = -\sqrt{2}$. As interseções com o eixo y são, portanto:

$$\gamma(-\sqrt{2}) = (0, 2+\sqrt{2}), \quad \gamma(0) = (0,0) \quad \text{e} \quad \gamma(\sqrt{2}) = (0, 2-\sqrt{2}).$$

$y(t) = t^2 - t$ se anula se, e somente se, $t = 0$ ou $t = 1$. As interseções com o eixo x são, portanto:

$$\gamma(0) = (0,0) \quad \text{e} \quad \gamma(1) = (-1, 0).$$

(b) Os pontos onde a tangente é horizontal são os pontos $\gamma(t)$ para os quais $y'(t) = 2t - 1 = 0$. Logo, a tangente é horizontal apenas no ponto $\gamma(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{8} - 1, \frac{1}{4} - \frac{1}{2}) = (-\frac{7}{8}, -\frac{1}{4})$. Os pontos onde a tangente é vertical são os pontos $\gamma(t)$ para os quais $x'(t) = 3t^2 - 2 = 0$, o que ocorre se, e somente se, $t = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $t = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Logo, a tangente é horizontal nos pontos

$$\left(-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+2\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\left(\frac{4\sqrt{6}}{9}, \frac{2+\sqrt{6}}{3}\right) \text{ e } \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\left(-\frac{4\sqrt{6}}{9}, \frac{2-\sqrt{6}}{3}\right)$$

(c) $\gamma(s) = \gamma(t)$ e $t \neq s$ se, e somente se,

$$\begin{cases} t^3 - 2t &= s^3 - 2s \\ t^2 - t &= s^2 - s \end{cases} \iff \begin{cases} t^3 - s^3 &= 2(t-s) \\ t^2 - s^2 &= t - s \end{cases} \iff \begin{cases} t^2 + st + s^2 &= 2 \\ t + s &= 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t^2 + (1-t)t + (1-t)^2 &= 2 \\ s &= 1-t \end{cases} \iff \begin{cases} t^2 - t - 1 &= 0 \\ s &= 1-t \end{cases}$$

$$\iff \quad (t,s) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{ou} \quad (s,t) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Assim, a única autointerseção da curva γ é

$$\gamma\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \gamma\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - (1+\sqrt{5}), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = (1,1)$$

A inclinação da reta tangente à curva em um ponto $\gamma(t)$ é igual a

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t-1}{3t^2-2}.$$

As inclinações das retas tangentes à curva na autointerseção $(1,1)$ são portanto obtidas substituindo-se $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ na expressão acima:

$$\frac{-\sqrt{5}}{3(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 - 2} = \frac{-4\sqrt{5}}{3(6-2\sqrt{5})-8} = \frac{-4\sqrt{5}}{10-6\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

e

$$\frac{\sqrt{5}}{3(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - 2} = \frac{4\sqrt{5}}{3(6+2\sqrt{5})-8} = \frac{4\sqrt{5}}{10+6\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

As duas retas tangentes têm portanto equações

$$2y = (3+\sqrt{5})x - \sqrt{5} - 1 \quad \text{e} \quad 2y = (3-\sqrt{5})x + \sqrt{5} - 1.$$

Questão 2 (3 pts)

(a) Parametrize a interseção C do plano $z = x + 1$ com o cilindro elíptico $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(b) Parametrize a reta tangente a C em um ponto onde ela (a curva) atravesse o plano yz.

`Solução:` (a) Para cada ponto (x,y) do plano xy pertencente à elipse de equação $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, existe um único ponto $(x,y,z) \in C$ (o z satisfaz $z = x+1$). Esta elipse no plano xy pode ser parametrizada por

$$(x(t), y(t)) = (2\cos t, \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Assim, a curva C pode ser parametrizada por

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (2\cos t, \operatorname{sen} t, 2\cos t + 1), \quad t \in [0, 2\pi].$$

(b) A curva C atravessa o plano yz nos pontos cujas coordenadas satisfazem as equações

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \quad z = x + 1, \quad x = 0.$$

As únicas soluções deste sistema de três equações e três incógnitas são $(0,1,1)$ e $(0,-1,1)$. São portanto dois os pontos da interseção do plano yz com a curva C:

$$\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0,1,1) \quad \text{e} \quad \gamma(\frac{3\pi}{2}) = (0,-1,1).$$

São tangentes a C nesses pontos, respectivamente, os vetores $\gamma'(\frac{\pi}{2})$ e $\gamma'(\frac{3\pi}{2})$. Temos

$$\gamma'(t) = (-2\operatorname{sen} t, \cos t, -2\operatorname{sen} t).$$

Logo $\gamma'(\frac{\pi}{2}) = (-2,0,-2) = -2(1,0,1)$ e $\gamma'(\frac{3\pi}{2}) = (2,0,2) = 2(1,0,1)$; ou seja, as retas tangentes a C nos pontos $(0,1,1)$ e $(0,-1,1)$ são paralelas entre si e paralelas ao vetor $(1,0,1)$. As equações paramétricas das duas retas tangentes são, respectivamente,

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 1 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Exibimos assim as equações das retas tangentes a C nos dois pontos onde ela (a curva) atravessa o plano yz (bastava em um dos dois pontos).

Questão 3 (4 pts) Considere a função $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, definida para $(x,y) \neq (0,0)$.
(a) Esboce as curvas de nível $f(x,y) = k$ para os seguintes cinco valores de k: $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$.
(b) Calcule $\lim\limits_{t\to 0} f(t^2, t)$.
(c) Existe o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?
(d) Existe o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} yf(x,y)$?

`Solução:` (a) Ver FigP1.pdf, nesta pasta.

(b) Como $f(t^2,t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{t^4+t^2}} = \dfrac{t^2}{|t|\sqrt{t^2+1}}$, para todo $t \neq 0$, e como $\dfrac{t^2}{|t|} = t$, se $t > 0$, e $\dfrac{t^2}{|t|} = -t$, se $t > 0$, segue que:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t^2,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = 0$$

e

$$\lim_{t\to 0^-} f(t^2,t) = -\lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = 0.$$

Como ambos os limites laterais são nulos, segue que o limite pedido é igual a zero.

(c) O limite não existe. Para provar isto, basta provar que existe uma curva contínua $\gamma(t)$ tal que $\gamma(0) = (0,0)$ e $\gamma(t) \neq (0,0)$ se $t \neq 0$, mas $\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma(t))$ não existe (pois, se o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existisse e fosse igual a L, $\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma(t))$ teria de existir e ser igual a L, qualquer que fosse uma tal curva γ). Podemos tomar, por exemplo, $\gamma(t) = (t,0)$. Como vimos no item (a), $f(\gamma(t)) = 1$ se $t > 0$ e $f(\gamma(t)) = -1$ se $t < 0$. Logo

$$\lim_{t\to 0^+} f(\gamma(t)) = 1 \neq \lim_{t\to 0^-} f(\gamma(t)) = -1.$$

Como os limites laterais são diferentes, o limite $\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma(t))$, não existe, como queríamos mostrar.

(d) Como $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, para todo (x,y), segue que

$$|f(x,y)| \leq 1, \quad \text{para todo} \ \ (x,y) \neq (0,0).$$

Daí $|yf(x,y)| \leq |y|$, para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |yf(x,y)| = 0$$

e, portanto, que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} yf(x,y) = 0.$$