MAT 2110 - Cálculo 1 para Química

1^a Prova - 6 de abril de 2015

Questão 1 (3 pts) Considere a função $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Calcule $f'(x)$ para $x > 0$, para $x < 0$ e para $x = 0$.

(c) Esboce os gráficos de f e de f'.

`Solução`: (a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ se $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$, se $x < 0$. Daí,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{1}{0+1} = 1$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{0-1} = -1.$$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ se $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$, se $x < 0$. Daí,

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{1\cdot(1+x) - x\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad \text{se} \quad x > 0$$

e

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1\cdot(1-x) - x\cdot(-1)}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{se} \quad x > 0.$$

Pela definição de derivada,

$$f'(0) = \lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{x}{1+|x|} - 0}{x} = \lim_{x\to0} \frac{1}{1+|x|} = 1.$$

(c) Os gráficos de f e de f' podem ser visualizados usando o Wolphram Alpha (aplicativo online gratuito). Fica mais fácil se as duas sentenças "$f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ se $x \geq 0$"e "$f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ se $x \leq 0$"forem resumidas em uma única fórmula usando a notação de valor absoluto:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+|x|)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Questão 2 (2 pts) Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$.

(a) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$.

(b) Mostre que $f'(0) = 0$.

(c) É f' contínua em $x = 0$?

`Solução`: (a) $f'(x) = 2x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} + x^2 \cdot \left(\cos \dfrac{1}{x}\right) \cdot \dfrac{-1}{x^2} = 2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$, se $x \neq 0$.

(b) Notando que $f(0) = 0$, devemos mostrar que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Para tanto, vamos usar a seguinte estimativa, válida para todo $x \neq 0$:

$$0 \leq \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \left|x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right| \leq |x|.$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, segue do teorema do confronto que $\lim\limits_{x \to 0} \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| = 0$ e, portanto, que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, como queríamos.

(c) Se f' fosse contínua em $x = 0$, valeria $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0) = 0$. Como, para $x \neq 0$,

$$\cos \frac{1}{x} = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - f'(x)$$

e

$$\lim_{x \to 0} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) = 0,$$

teríamos, então,

$$\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x} = 0,$$

o que sabemos ser falso (este limite não existe). Logo, f' não é contínua em $x = 0$.

Questão 3 (2 pts) (a) Derive $f(x) = \arctan \dfrac{1 + 2x}{1 - 2x}$.

(b) Derive $g(x) = \dfrac{\pi}{4} + \arctan(2x)$.

(c) Verifique que $f'(x) = g'(x)$ para todo x pertencente ao domínio de f e ao domínio de g.

`Solução`: (a)

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^2} \cdot \frac{2(1 - 2x) - (-2)(1 + 2x)}{(1 - 2x)^2} = \frac{4}{(1 - 2x)^2 + (1 + 2x)^2} = \frac{4}{2 + 8x^2} = \frac{2}{1 + 4x^2}.$$

(b)

$$g'(x) = 0 + \frac{1}{1 + (2x)^2} \cdot 2 = \frac{2}{1 + 4x^2}$$

(c) Os cálculo feitos para resolver os itens (a) e (b) já mostram que $f'(x) = g'(x)$ para todo x.

Questão 4 (2 pts) Considere a função $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot (\operatorname{sen} \sqrt[3]{x})^2$.

(a) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$.

(b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

(c) É f derivável em $x = 0$?

`Solução`: (a)

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(\operatorname{sen} \sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \cdot 2 \operatorname{sen} \sqrt[3]{x} \cdot \cos \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{\operatorname{sen} \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{\operatorname{sen} \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} \cdot \cos \sqrt[3]{x}.$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} \cdot (\operatorname{sen} \sqrt[3]{x})^2}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 = \lim_{\theta\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}\right)^2 = \left(\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}\right)^2 = 1^2 = 1.$$

(c) Sim. Decorre do item (b) que $f'(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Questão 5 (1,5 pts)

Ache a equação da reta tangente à curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ no ponto $(2^{3/2}, 2^{3/2})$.

`Solução`: Primeiro observemos que o ponto dado de fato pertence à curva dada, pois

$$(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} + (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = 2 + 2 = 4.$$

Podemos achar a inclinação da reta tangente por derivação implícita. Se $y = y(x)$ é uma função satisfazendo $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ (isto é os pontos do gráfico da função estão na curva), então

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0, \quad \text{logo,} \quad y' = -\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{3}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

No ponto dado, $(2^{3/2}, 2^{3/2})$, temos $\frac{y}{x} = 1$, logo a inclinação da reta tangente é igual a

$$y'(2^{\frac{3}{2}}) = -1^{\frac{1}{3}} = -1.$$

A equação da reta tangente é, portanto, $y - 2^{\frac{3}{2}} = -(x - 2^{\frac{3}{2}})$, ou $x + y = 2^{\frac{5}{2}}$.