MAT0146 - CÁLCULO 2 PARA ECONOMIA

2° SEMESTRE DE 2016
LISTA DE PROBLEMAS

Geometria Analítica

1) Sejam π_1 e π_2 os planos de equações, respectivamente, $x + y + 2z = 2$ e $2x - y + z = 1$. Seja r a reta formada pela interseção de π_1 e π_2.
(a) Determine equações paramétricas para r.
(b) Determine uma equação do plano π que contém r e o ponto $A = (0, 0, -1)$.
(c) Determine a interseção com π da reta que passa pelo ponto $(1, 0, 1)$ e é perpendicular a π.
(d) Calcule a distância de $(1, 0, 1)$ a π.

2) Para cada $\alpha \in [0, 2\pi)$ sejam $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ as retas parametrizadas por

$$\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}\cos\alpha, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha, 1) - t\sqrt{2}\langle\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha, \cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha, \sqrt{2}\rangle$$

e

$$\mathbf{s}(t) = (\sqrt{2}\cos\alpha, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha, 1) - t\sqrt{2}\langle\cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha, \mathrm{sen}\,\alpha - \cos\alpha, \sqrt{2}\rangle.$$

(a) Mostre que as retas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ estão contidas no hiperboloide de revolução $z^2 = x^2 + y^2 - 1$
(b) Mostre que, para cada ponto (a, b, c) no hiperboloide $z^2 = x^2 + y^2 - 1$, existem únicos $\alpha \in [0, 2\pi)$ e $t \in \mathbb{R}$ tais que $\mathbf{r}(t) = (a, b, c)$.
(c) Mostre que, para cada ponto (a, b, c) no hiperboloide $z^2 = x^2 + y^2 - 1$, existem únicos $\alpha \in [0, 2\pi)$ e $t \in \mathbb{R}$ tais que $\mathbf{s}(t) = (a, b, c)$.
`Sugestão para o` (b) `e o` (c): Resolva um sistema com t, $\cos\alpha$ e $\mathrm{sen}\,\alpha$ no lugar das variáveis. Para mostrar que os valores encontrados para o que deveria ser $\cos\alpha$ e $\mathrm{sen}\,\alpha$ são de fato o cosseno e um seno de algum α, basta mostrar que a soma de seus quadrados é igual a 1.

$\tilde{2}$) Mostre que por cada ponto do hiperboloide de revolução $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ passam duas retas contidas no hiperboloide.

3) Seja C a curva determinada pela interseção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ (veja figuras na Seção 13.1 do livro-texto).
(a) Determine os pontos de C que pertencem também ao plano π de equação $x + y + z = \frac{3}{2}$.
(b) Determine o cosseno do ângulo agudo formado pela reta tangente a C e pela reta perpendicular a π em cada um dos pontos encontrados no item (a).

Continuidade

4) Determine o valor de L que torna contínua a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4}{x^4+y^6}\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ L, & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

5) Considere a função $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x^{-2}}y^2}{e^{-2x^{-2}}+y^4}, & \text{se } x\neq 0\\ 0, & \text{se } x=0\end{cases}$.

(a) Mostre que, para todo inteiro positivo m, $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t^m)=0$.

(b) Mostre que, para todo inteiro positivo m, $\lim\limits_{t\to 0} f(t^m,t)=0$.

(c) Mostre que $f(t,e^{-\frac{1}{2t^2}})=\frac{1}{2}$ para todo $t\neq 0$.

(d) É f contínua em $(0,0)$?

`Dica`: Segue da Regra de l'Hospital que, para todo inteiro positivo m, $\lim\limits_{s\to\infty} s^m e^{-s}=0$. Daí decorre que também se anula o limite $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{-t^{-2}}}{t^{2m}}$.

Derivadas Parciais

6) Mostre que $f(x,y)=(x^2+y^2)^{2/3}$ possui derivadas parciais de primeira ordem contínuas em $(x,y)=(0,0)$.

7) Mostre que ambas as funções (a) $u(x,t)=e^{-t}\operatorname{sen}(x)$ e (b) $v(x,t)=t^{-1/2}e^{-x^2/4t}$ satisfazem a equação diferencial parcial $u_t=u_{xx}$.

8) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z=xf\left(\dfrac{x}{y}\right)$ passam pela origem.

9) Considere as funções $F(x,y,z)=x^2+2y^2-z^2+3x$ e $G(x,y,z)=2x^2+4y^2-2z^2-5y$.

(a) Mostre que $\nabla F(x,y,z)$ e $\nabla G(x,y,z)$ não são paralelos se $z\neq 0$.

(b) Mostre que os hiperboloides $F(x,y,z)=1$ e $G(x,y,z)=0$ não são tangentes nos pontos em que se intersectam.

10) Considere o cone $z^2=3(x^2+y^2)$ e a família de esferas $x^2+y^2+(z-2\alpha)^2=\alpha^2$, $0\neq\alpha\in\mathbb{R}$.

(a) Mostre que cada uma dessas esferas é tangente ao cone em todos os pontos em que se intersectam.

(b) Faça uma figura que ilustre a afirmação do item (a).

Máximos e Mínimos

11) Mostre que a função $f(x,y) = e^{3x} + y^3 - 3ye^x$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, possui um único ponto crítico, que é um mínimo local, e que não é um mínimo global.

12) (a) Encontre e classifique os pontos críticos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(b) Mostre que $(1,1)$ é o ponto de mínimo de f restrita a $\{(x,y);\, 0 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq 2\}$
(c) Para cada $a \geq 2$, mostre que $t^3 + a^3 - 3at > 0$ para todo $t > 0$.
(d) Mostre que $(1,1)$ é o ponto de mínimo de f restrita a $\{(x,y);\, x > 0,\, y > 0\}$.

13) Dado $A > 0$, considere a função $f(x,y) = xy\,\dfrac{A - xy}{2(x+y)}$ definida no domínio

$$D = \{(x,y);\, x > 0,\, y > 0,\, xy < A\}.$$

(a) Mostre que $(\sqrt{\frac{A}{3}}, \sqrt{\frac{A}{3}})$ é o único ponto crítico de f em D.
(b) Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
`Sugestão`: use que $x + y > \sqrt{x^2 + y^2}$ se x e y forem positivos.
(c) Conclua que, tomando f como sendo igual a zero nos pontos da fronteira de D, obtém-se uma extensão contínua de f a $\overline{D} = \{(x,y);\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, xy \leq A\}$
(d) Mostre que, se $x + y = R > 0$, então $f(x,y) \leq \frac{A^2}{8R}$. `Sugestão`: Maximize $g(t) = t(A - t)$.
(e) Dado $R > 0$, considere $\overline{D}_R = \{(x,y) \in \overline{D};\, x + y \leq R\}$. Mostre que, se $R > \sqrt{2A}$, então $(\sqrt{\frac{A}{3}}, \sqrt{\frac{A}{3}})$ é o ponto de máximo de f em $\overline{D}_R$.
(f) Conclua que $(\sqrt{\frac{A}{3}}, \sqrt{\frac{A}{3}})$ é o ponto de máximo de f em D.

14) Dentre todas as caixas retangulares sem tampa com área A, encontre as dimensões daquela que tem o maior volume.

Algumas Soluções (ou esboços de soluções)

1 (a)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 2 - 2z \\ 2x - y = 1 - z \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = 3 - 3z \\ y = 2x + z - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 1 - z \end{cases}$$

Logo, um ponto (x,y,z) pertence à interseção de π_1 e π_2 se, e somente se,

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \quad , \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

(b) Fazendo $t = 0$ e $t = 1$ nas equações paramétricas de r, concluímos que os pontos $B = (1,1,0)$ e $C = (0,0,1)$ pertencem ao plano π. Dado que $A = (0,0,-1)$ também pertece a π, temos que os vetores

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \langle 1,1,1\rangle$ e $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \langle 0,0,1\rangle$ são paralelos a π. Daí:

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{k}} \times (\overrightarrow{\mathbf{i}} + \overrightarrow{\mathbf{j}} + \overrightarrow{\mathbf{k}}) = \overrightarrow{\mathbf{j}} - \overrightarrow{\mathbf{i}} = \langle -1,1,0\rangle$$

é perpendicular a π. A equação de π é, portanto, $-x+y=d$, para algum d. O valor de d pode ser determinado impondo que o ponto $A=(0,0,-1)$ satisfaz a equação, logo $d=0$ e a equação pedida é $x-y=0$.

(c) A reta perpendicular a π que passa por $(1,0,1)$ é paralela ao vetor normal a π, $\langle 1,-1,0\rangle$. Suas equações paramétricas são, portanto,

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

O ponto da reta que pertence também ao plano π corresponde ao valor de t tal que $1+t+t=0$, ou seja, a $t=-\frac{1}{2}$. O ponto pedido é portanto $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$.

(d) Por definição, a distância de um ponto a um plano é a distância do ponto ao pé da perpendicular ao plano que passa pelo ponto. Logo, a distância pedida é igual à distância entre os pontos $(1,0,1)$ e $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$, que é igual a

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\tilde{2}$) Embora trabalhoso, é elementar verificar que, se (a,b,c) é um ponto do hiperboloide, ou seja, se $a^2+b^2-1 = c^2$, então as retas

$$\begin{cases} x = a+(b-ac)t \\ y = b-(a+bc)t \\ z = c-(a^2+b^2)t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = a+(b+ac)t \\ y = b-(a-bc)t \\ z = c+(a^2+b^2)t \end{cases}$$

estão contidas no hiperboloide. Além disso, os vetores $\langle b-ac,\, -a-bc,\, -a^2-b^2\rangle$ e $\langle b+ac,\, -a+bc,\, a^2+b^2\rangle$ não são paralelos (logo, trata-se de fato de duas retas distintas).

13) (a) Os pontos de (x,y) de D satisfazem $x>0$ e $y>0$. Daí, para $(x,y)\in D$, temos:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \dfrac{y^2(A-2xy-x^2)}{2(x+y)^2} = 0 \\[2ex] f_y(x,y) = \dfrac{x^2(A-2xy-y^2)}{2(x+y)^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xy+x^2 = A \\ 2xy+y^2 = A \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2xy+x^2 = A \\ x^2 = y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 = A \\ x = y \end{cases} \iff x = y = \sqrt{\frac{A}{3}}.$$

(b) Primeiramente demonstremos a desigualdade da sugestão, mostrando que ela é equivalente a uma desigualdade que sabemos ser verdadeira. Se $x>0$ e $y>0$, temos

$$x+y > \sqrt{x^2+y^2} \iff (x+y)^2 > x^2+y^2 \iff x^2+y^2+2xy > x^2+y^2 \iff 2xy > 0$$

(a última desigualdade é verdadeira para $x > 0$ e $y > 0$, logo a primeira também é). Daí, para todo $x > 0$ e $y > 0$, temos:

$$0 < f(x,y) = xy\,\frac{A-xy}{2(x+y)} \;<\; \frac{xy(A-xy)}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{y(A-xy)}{2} \;<\; \frac{y(A-xy)}{2} \;<\; \frac{Ay}{2}.$$

Segue por confronto, pois $\frac{Ay}{2}$ tende a 0 quando (x,y) tende a $(0,0)$, que

$$\lim_{D\ni(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

(Note que o limite de $\frac{xy(A-xy)}{2(x+y)}$ existe quando (x,y) tende a $(0,0)$ *em* D, que foi escolhido como o domínio de f. Se (x,y) tender a $(0,0)$ por pontos muito próximos da reta $x+y=0$, $\frac{xy(A-xy)}{2(x+y)}$ pode tender a ∞. Tente visualizar o gráfico usando computador.)

(c) Basta mostrar que, se (x_0,y_0) é um ponto da fronteira de D, então

$$\lim_{D\ni(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0.$$

Provamos isso no item (b) para o caso em que $(x_0,y_0) = (0,0)$. Nos demais pontos, $x_0+y_0 \neq 0$ e, ou $x_0y_0 = 0$ ou $x_0y_0 = A$ (faça uma figura para entender por quê). Logo

$$\lim_{D\ni(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{D\ni(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{xy(A-xy)}{2(x+y)} = \frac{x_0y_0(A-x_0y_0)}{2(x_0+y_0)} = 0.$$

(d) O valor máximo do polinômio $g(t) = t(A-t)$ ocorre quando $t = \frac{A}{2}$. Logo, $g(t) \leq g(\frac{A}{2}) = \frac{A^2}{4}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Substituindo t por xy, vem que $xy(A-xy) \leq \frac{A^2}{4}$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Quando $x+y = R > 0$, temos portanto

$$f(x,y) = \frac{xy(A-xy)}{2(x+y)} = \frac{xy(A-xy)}{2R} \leq \frac{1}{2R}\,\frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{8R},$$

como queríamos.

(e) Vimos no item (a) que o único ponto crítico de f em D é $P = (\sqrt{\frac{A}{3}}, \sqrt{\frac{A}{3}})$, que pertence ao interior de $\overline{D}_R$, pois $\sqrt{\frac{A}{3}} + \sqrt{\frac{A}{3}} < \sqrt{2A} < R$. O conjunto $\overline{D}_R$ é fechado e limitado e a função f é contínua em $\overline{D}_R$. Logo, f possui (pelo menos) um ponto de máximo em $\overline{D}_R$. Se um tal ponto estiver no interior de $\overline{D}_R$, ele será um ponto crítico de f, ou seja, será igual a P. O valor de f em P é

$$f\left(\sqrt{\frac{A}{3}}, \sqrt{\frac{A}{3}}\right) = \frac{A}{3}\,\frac{A-\frac{A}{3}}{4\sqrt{\frac{A}{3}}} = \frac{A^{3/2}}{6\sqrt{3}}.$$

Para provar que P_0 é o (único) ponto de máximo de f em $\overline{D}_R$, basta portanto provar que $\frac{A^{3/2}}{6\sqrt{3}}$ é maior do que o máximo de f na fronteira de $\overline{D}_R$, que é o que provaremos em seguida, provando que o valor de f em um ponto arbitrário da fronteira de $\overline{D}_R$ é menor do que $\frac{A^{3/2}}{6\sqrt{3}}$.

Seja (x_0,y_0) um ponto da fronteira de $\overline{D}_R$. Se (x_0,y_0) for também um ponto da fronteira de D, então $f(x_0,y_0) = 0 < \frac{A^{3/2}}{6\sqrt{3}}$. Se (x_0,y_0) não for um ponto da fronteira de D, então $x_0+y_0 = R$ e, pelo item (d),

$f(x_0, y_0) \leq \frac{A^2}{8R}$. Para provar que P é o ponto de máximo de f em $\overline{D}_R$, basta portanto provar que $\frac{A^2}{8R}$ é menor do que $\frac{A^{3/2}}{6\sqrt{3}}$. Temos

$$\frac{A^2}{8R} < \frac{A^{3/2}}{6\sqrt{3}} \iff \frac{A^4}{64\,R^2} < \frac{A^3}{108} \iff R^2 > \frac{27\,A}{16}.$$

Esta última desigualdade é verdadeira pois, por hipótese, $R^2 > 2A$ e 2 é maior do que 27/16. Logo, $\frac{A^2}{8R} < \frac{A^{3/2}}{6\sqrt{3}}$, como queríamos.

(f) Seja (x, y) um ponto qualquer de D, distinto de P. Para R suficientemente grande, $(x, y) \in \overline{D}_R$. Segue do item (e) que

$$f(x,y) < f\left(\sqrt{\frac{A}{3}}, \sqrt{\frac{A}{3}}\right) = \frac{A^{3/2}}{6\sqrt{3}},$$

como queríamos.