MAT 2110 - Cálculo I para Química - USP - 1° Semestre de 2015

Lista de Exercícios - Noções de Equações Diferenciais

(**1**) Verifique que as funções $f(x) = \ln(\sec x + \tan x)$ e $g(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}\right)$, definidas para todo x tal que $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, diferem por uma constante. Encontre o valor dessa constante.

(**2**) Verifique que as funções $f(x) = -\dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen} x$ e $g(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, definidas para todo x tal que $-1 < x < 1$, diferem por uma constante. Encontre o valor dessa constante.

(**3**) Seja a uma constante real positiva. Mostre que as funções $f(x) = \arctan(x)$ e $g(x) = \arctan\dfrac{a+x}{1-ax}$ têm a mesma derivada na intersecção dos seus domínios, ou seja, no conjunto de todos números reais x que são diferentes de $\frac{1}{a}$. Calcule o valor da diferença $f(x) - g(x)$ para $x < \frac{1}{a}$ e para $x > \frac{1}{a}$.

(**4**) A velocidade da reação química $S_2O_8^{2-}$(aq)+$3I^-$(aq)$\rightarrow$$2SO_4^{2-}$(aq)+$I_3^-$(g) é diretamente proporcional ao produto das concentrações de $S_2O_8^{2-}$ e de I^- [Peter Atkins, Princípios de Química, Seção 13.3, página 650 da edição brasileira de 2001].

(a) Determine como varia com o tempo a concentração de $S_2O_8^{2-}$, usando como parâmetros a constante de proporcionalidade k e as concentrações iniciais a e b (em $t = 0$) de, respectivamente, $S_2O_8^{2-}$ e I^-.

(b) Estude o que acontece com a concentração dos dois reagentes quando t tende a infinito.

`Sugestão de passos para uma solução`:

(i) Mostre que, se $x(t)$ é a concentração de $S_2O_8^{2-}$ no instante t, então $x' = -3kx(x + A)$, sendo que $A = \frac{b}{3} - a$.

(ii) Separe em três casos: $A = 0$, $A > 0$ ou $A < 0$. No caso em que $A \neq 0$, mais um passo é necessário.

(iii) Para achar uma função cuja derivada seja igual a $\dfrac{1}{x(x+A)}$, use a identidade $\dfrac{1}{x(x+A)} = \dfrac{1}{A}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+A}\right)$.

(**5**) Dadas constantes positivas a e b, e dado x_0 um número positivo menor do que b, encontre uma função $x(t)$, definida para todo $t > 0$, satisfazendo $x' = ax(b - x)$ e $x(0) = x_0$. Mostre que $x(t)$ tende a b quando t tende a infinito. `Dica`: Use o mesmo artifício algébrico do item (iii) da sugestão do problema anterior.

(**6**) Dada uma constante real positiva a, encontre uma função $x(t)$ que satisfaça $x(0) = 1$ e $x'(t) = -atx(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(**7**) (a) Encontre uma função $v(t)$ que satisfaça $v'(t) + \frac{1}{t}v(t) = 0$ para todo $t > 0$. Mostre que existem infinitas dessas funções.

(b) Encontre uma função $u(t)$, definida para todo $t > 0$, tal que $u''(t) + \frac{1}{t}u'(t) = 0$ para todo $t > 0$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0$.

(**8**) (a) Encontre uma função $v(t)$ que satisfaça $v'(t) + \frac{\mathbf{2}}{t}v(t) = 0$ para todo $t > 0$. Mostre que existem infinitas dessas funções.

(b) Encontre uma função $u(t)$, definida para todo $t > 0$, tal que $u''(t) + \frac{\mathbf{2}}{t}u'(t) = 0$ para todo $t > 0$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0$.

(**9**) As funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico definem-se pelas fórmulas

$$\cosh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mostre que elas são, respectivamente, soluções dos "problemas de valor inicial"

$$\begin{cases} x'' - x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x'' - x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}.$$

(**10**) (a) Dada uma constante positiva ω, mostre que, para quaisquer que sejam os números reais A e B, a função $x(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$, $t \in \mathbb{R}$, satisfaz a equação diferencial $x'' + \omega^2 x = 0$.

(b) Dados x_0 e y_0 reais, encontre $x(t)$ tal que $\begin{cases} x'' + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$.

(**11**) Ache uma constante real a de modo que $x(t) = t^a$, $t > 0$, satisfaça a equação diferencial $2t^2x'' + 3tx' - x = 0$.

`Resposta:` $a = -1$ ou $a = \frac{1}{2}$.

(**12**) Ache uma constante real λ de modo que $x(t) = e^{\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$, satisfaça a equação diferencial $4x'' - 8x' + 3x = 0$.

`Resposta:` $\lambda = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = \frac{3}{2}$.

(**13**) Ache uma constante real λ de modo que $x(t) = e^{\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$, satisfaça a equação diferencial $x'' - 4x' + 4x = 0$.

`Resposta:` $\lambda = -2$.

(**14**) Mostre que $x(t) = te^{-2t}$, $t \in \mathbb{R}$, satisfaz a equação diferencial $x'' - 4x' + 4x = 0$.