DISTÂNCIA DE UM PONTO A UMA ELIPSE

SEVERINO TOSCANO DO REGO MELO
USP – MAT 2127 – 2015

Vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar o ponto da elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

mais próximo do ponto $(1,1)$. Para isso, vamos minimizar a função $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ (que é igual ao quadrado da distância de (x,y) a $(1,1)$) sujeita à "restrição" $g(x,y) = 1$, sendo

$$g(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}.$$

No sistema abaixo, as duas primeiras equações são equivalentes a $\nabla f = \lambda \nabla g$ e a terceira é equivalente à restrição $g(x,y) = 1$.

$$(1) \qquad \begin{cases} 2(x-1) &= 2\lambda \cdot \frac{x}{9} \\ 2(y-1) &= 2\lambda \cdot \frac{y}{4} \\ 4x^2 + 9y^2 &= 36 \end{cases}$$

Note, para qualquer valor de λ, $x = 0$ não é solução da primeira equação e $y = 0$ não é solução da segunda equação. Para resolver o sistema, podemos portanto dividir equações por x e por y, Temos assim:

$$\begin{cases} 2(x-1) &= 2\lambda \cdot \frac{x}{9} \\ 2(y-1) &= 2\lambda \cdot \frac{y}{4} \\ 4x^2 + 9y^2 &= 36 \end{cases} \iff \begin{cases} 9(1-\frac{1}{x}) &= \lambda \\ 4(1-\frac{1}{y}) &= \lambda \\ 4x^2 + 9y^2 &= 36 \end{cases} \iff \begin{cases} 9 - \frac{9}{x} &= 4 - \frac{4}{y} \\ 4x^2 + 9y^2 &= 36 \\ \lambda &= 4(1-\frac{1}{y}) \end{cases}.$$

Como não estamos interessados no valor de λ, podemos continuar a resolução do sistema usando apenas as duas equações em que ele não aparece:

$$\begin{cases} 9 - \frac{9}{x} &= 4 - \frac{4}{y} \\ 4x^2 + 9y^2 &= 36 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= 4x/(9-5x) \\ 4x^2 + 9y^2 &= 36 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação do último sistema na segunda, obtemos

$$4x^2 + 9\frac{16x^2}{(9-5x)^2} = 36 \iff 4x^2(9-5x)^2 + 144x^2 = 36(9-5x)^2.$$

Precisamos apelar para métodos numéricos para obter soluções aproximadas desta equação de quarto grau. Digitando, por exemplo, "solve 4x∧2(9-5x)∧2+144x∧2=36(9-5x)∧2" numa janela de comando do WolframAlpha, vemos que esta equação tem (apenas) duas raízes reais, dadas aproximadamente por

$$x_1 \cong -2,90702 \quad \text{e} \quad x_2 \cong 1,24999.$$

O valor de y correspondente a cada valor de x é dado pela equação $y = 4x/(9-5x)$:

$$y_1 = \frac{4x_1}{9-5x_1} \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{4x_2}{9-5x_2}.$$

Como a função f é contínua e a elipse em questão (na verdade, qualquer elipse) é um subconjunto fechado e limitado do plano $\mathbb{R}^2$, segue que f tem um ponto de máximo e um ponto de mínimo na elipse. Nesses pontos, necessariamente, a equação $\nabla f = \lambda \nabla g$ será satisfeita para algum $\lambda \in \mathbb{R}^2$. Vimos que só há dois pontos da elipse em que essa condição é satisfeita, (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Um deles é o máximo, o outro é o mínimo. É fácil a gente se convencer, fazendo uma figura, de que (x_1, y_1) é o ponto de máximo e (x_2, y_2) é o ponto de mínimo. O cálculo de valores aproximados de $f(x_1, y_1)$ e $f(x_2, y_2)$ não deixa dúvida de que este é o caso.

Concluímos assim que a distância de $(1, 1)$ à elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ é igual a

$$\sqrt{f(x_2, y_2)} \cong \sqrt{(0,25)^2 + \left(\frac{4 \cdot 1,25}{9 - 5 \cdot 1,25} - 1\right)^2} = \sqrt{(1/4)^2 + (9/11)^2} \cong 0,8555.$$

Isso parece bem razoável olhando a figura, não?