DEFINIÇÃO DE INTEGRAL DEFINIDA

USP – MAT 0146 – 2016

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Para cada inteiro positivo n, subdividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de igual comprimento com extremidades nos pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, $x_i = a + \frac{(b-a)i}{n}$, $0 \leq i \leq n$. Sejam c_i e d_i, respectivamente, pontos de máximo e de mínimo de f em $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$; isto é, c_i e d_i são pontos de $[x_{i-1}, x_i]$ tais que $f(c_i) \leq f(x) \leq f(d_i)$ para todo $x \in [x_{i-1}, x_i]$ (esses pontos c_i e d_i existem, pois toda função conínua em um intervalo fechado tem ponto de máximo e ponto de mínimo). Denotando por Δx o comprimento dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, definimos

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} f(c_i)\Delta x \quad \text{e} \quad S_n = \sum_{i=0}^{n} f(d_i)\Delta x.$$

Teorema: *Existem e são iguais os limites* $\lim_{n\to\infty} s_n$ e $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Por definição, a *integral de f no intervalo* $[a, b]$ é o número real $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$. Este número é denotado por $\int_a^b f(x)\,dx$.

No caso em que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, s_n mede a área de uma união finita de retângulos contidos na região $R = \{(x, y);\ a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$ e S_n mede a área de uma união finita de retângulos que contém a região R. Assim, se A é a "área" (seja lá o que isso queira dizer) da região R, então $s_n \leq A \leq S_n$; daí, $\lim_{n\to\infty} s_n \leq A \leq \lim_{n\to\infty} S_n$; portanto,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx = A.$$

Em resumo, a área da região abaixo do gráfico de f e acima do eixo dos x é medida pela integral de f em $[a, b]$, `no caso em que` f `assume apenas valores não-negativos`.

Para cada i entre 1 e n, podemos escolher arbitrariamente pontos (chamados *pontos amostrais*) x_i^* em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$; isto é, os pontos amostrais x_i^* são tais que $x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i$. Temos, portanto, $f(c_i) \leq f(x_i^*) \leq f(d_i)$ para cada i. Somando em i, vem:

$$s_n \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \leq S_n.$$

Por confronto, segue que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x. \tag{1}$$

Mais geralmente, se subdividirmos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos não-necessariamente iguais, com extremidades em $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, se escolhermos pontos amostrais x_i^* em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, podemos formar a *soma de Riemann*

$$S(x_0, x_1, \cdots, x_n; x_1^*, \cdots, x_n^*) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}).$$

Também é verdade que essas somas tendem à integral de f em $[a, b]$, `desde que` o tamanho máximo dos subintervalos fique arbitrariamente pequeno. Mais precisamente, pode-se demonstrar que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \epsilon.$$

O Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, seja F uma primitiva de f, também definida em $[a, b]$, isto é, $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Considere a *partição* de $[a, b]$ dada por $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Aplicando o Teorema do Valor Médio, para cada i entre 1 e n, à função F no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, concluímos que existem $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(x_i^*) = f(x_i^*)$$

(a primeiras destas igualdades vem do TVM e a segunda vem da hipótese $F' = f$). Segue daí (com $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$) que

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Esta última soma é uma daquelas "somas telescópicas" que podem ser simplicadas e virar uma soma com apenas dois termos. Usando que $x_0 = a$ e $x_n = b$, vem, portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = [F(x_n) - F(x_{n-1})] + \cdots + [F(x_2) - F(x_1)] + [F(x_1) - F(x_0)] = F(b) - F(a).$$

Em outras palavras, dada qualquer partição do intervalo $[a, b]$, é sempre possível escolher pontos amostrais de modo que a soma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ seja igual a $F(b) - F(a)$. Ou seja a sequência do lado direito da igualdade (1) é constante e igual a $F(b) - F(a)$; logo o limite do lado direito de (1) é igual a $F(b) - F(a)$. Isto prova [1] uma das versões do Teorema Fundamental do Cálculo:

(2) $$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a), \quad f \text{ contínua em } [a, b],\ F' = f.$$

A outra versão do TFC diz que, se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua definida no intervalo I e se $a \in I$, a função definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, $x \in I$, é derivável e $F' = f$. Este teorema é demonstrado na Seção 5.3 (da sexta edição) do Stewart. Isto prova, em particular, que toda função contínua tem uma primitiva. A versão do TFC que nós demonstramos acima pode ser obtida como consequência de (2). Isso também está feito na Seção 5.3 do Stewart.

[1] Isto prova o TFC desde que aceitemos como verdadeira a existência da integral de uma função contínua, tal como definimos aqui.