MAT0146 - CÁLCULO 1 PARA ECONOMIA

1° SEMESTRE DE 2016
LISTA DE PROBLEMAS

Revisão

1) Determine os valores de x que satisfazem: (a) $|3-8x| \leq 5$, (b) $|x^2-2| \leq 1$.
Respostas: (a) $\{x;\, -\frac{1}{4} \leq x \leq 1\}$. (b) $\{x;\, -\sqrt{3} \leq x \leq -1$ ou $1 \leq x \leq \sqrt{3}\}$

2) Esboce os gráficos das funções: (a) $f(x) = |3-8x|$, (b) $g(x) = |x^2-1|$. Tente vizualizar nesses gráficos as respostas da Questão 1.

3) Resolva as equações: (a) $|x+2| = \sqrt{4-x}$, (b) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$.
Respostas: (a) $x = 0$ ou $x = -5$. (b) $x = 3$ ou $x = -3$.

4) Esboce os gráficos das funções: (a) $f(x) = |x+2|$, (b) $g(x) = \sqrt{4-x}$, (c) $h(x) = x^2 - 2|x| - 3$. Tente vizualizar nesses gráficos as respostas da Questão 3 .

5) Seja $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$, sendo a, b, c e d constantes e $c \neq 0$. Para todo $x \neq \frac{a}{c}$, mostre que $f(f(x)) = x$.

6) Esboce os gráficos de: (a) $y = x^2+1$, (b) $y = (x+3)^2$, (c) $y = 3-(x+1)^2$, (d) $y = 2-(x+2)^2$.

7) Mostre que o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(x_0, \frac{1}{x_0})$ e $(x_0+h, \frac{1}{x_0+h})$ é igual a $-\frac{1}{x_0(x_0+h)}$.

Regras de Derivação

8) Determine a e b de modo que $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+c, & \text{se } x < 1 \\ x^2-5x+6, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ seja derivável em todo $x \in \mathbb{R}$ e satisfaça $f'(0) = 0$.
Respostas: (a) $a = -\frac{3}{2}$, $b = 0$, $c = \frac{7}{2}$.

9) Determine a e b de modo que $f(x) = \begin{cases} ax+b, & \text{se } x<1 \\ 1/x, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ seja derivável em $x=1$. Quanto vale, então, $f(0)$?

Respostas: $a=-1$, $b=0$ e $f(0)=2$.

10) Mostre que $f(x) = \cos\sqrt{|x|}$ não é derivável em $x=0$ e que $f'(x) = -\dfrac{\sqrt{|x|}\cdot \operatorname{sen}\sqrt{|x|}}{2x}$ se $x \neq 0$.

11) Seja $f(x) = |x|^3$. Mostre que $f'(x) = 3x|x|$ e $f''(x) = 6|x|$.

Derivação Implícita

12) Encontre as coordenadas dos pontos da curva $2(x^2+y^2)^2 = 25(x^2-y^2)$ que possuem reta tangente horizontal (esta curva é a "lemniscata" do problema 3.5.29 do Stewart, sexta edição; vejam lá a figura).

13) Mostre que a curva $y^2 = 5x^4 - x^2$ não possui reta tangente que seja paralela à reta $y=x$ (esta é a "curva de Eudoxo"; pus uma figura dela no site do curso).

14) A curva $y^2 = x^3 + 3x^2$ é chamada de "curva de Tschirnhausen" e há uma figura dela no site do curso. (a) Mostre que ela possui duas retas tangentes paralelas à reta $y=x$. (b) Ache as equações das retas tangentes a ela na origem (para isso, talvez seja necessário explicitar, de duas maneiras, y como função de x e usar a definição de derivada).

15) A curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ é chamada de "astroide", sendo $a>0$ constante. (a) Encontre a equação da reta tangente à astroide em um ponto (x_0, y_0), com $x_0 \neq 0 \neq y_0$. (b) Mostre que essa reta intersecta os dois eixos coordenados e que o segmento de reta com extremos nesses dois pontos de interseção tem comprimento igual a a.

Desigualdades via TVM

16) Usando que $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$ para todo $x > 0$, mostre que $x - \frac{x^3}{6} < \operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ para todo $x>0$.

17) Mostre que $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ para todo $x>0$.

18) Mostre que $x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ para todo $x > 0$.

Gráficos

19) Dadas constantes reais p e q, considere a função polinomial $f(x) = x^3 + px + q$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que, se $p \geq 0$, então f é crescente.

(b) Mostre que, se $p < 0$, então f tem um máximo local em $x = -\sqrt{\frac{|p|}{2}}$ e tem um mínimo local em $x = \sqrt{\frac{|p|}{2}}$.

(c) Mostre que o produto dos valores de f em $x = -\sqrt{\frac{|p|}{2}}$ e em $x = \sqrt{\frac{|p|}{2}}$ é igual a $D = 4(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27})$.

(d) Use um argumento gráfico para se convencer de que, no caso em que $p < 0$: (i) se $D > 0$ então f tem uma única raiz real, (ii) se $D = 0$, então f tem duas raízes reais e (iii) se $D < 0$, então f tem três raízes reais.

`Observação`: A mudança de variável $x = y - \frac{a}{3}$ transforma a equação de terceiro grau $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ numa equação na forma especial $y^3 + py + q = 0$. Este problema fornece, portanto, um critério para determinar o número de raízes de uma equação do terceiro grau.

20) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \ln |x|, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

(a) Mostre que f tem um ponto de inflexão em $x = 0$ e $f''(0) = f'(0) = 0$.

(b) Determine os intervalos em que f é crescente ou decrescente.

(c) Determine os intervalos em que o gráfico de f é côncavo para cima ou para baixo.

(d) Esboce o gráfico de f, localizando os pontos de máximo ou de mínimo local e os pontos de inflexão.

21) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que f tem um ponto de mínimo em $x = 0$ e $f''(0) = f'''(0) = 0$. `Observação`: Na verdade, f possui derivadas de todas as ordens nulas em $x = 0$. Esta afirmação requer um argumento um pouco mais sofisticado para ser demonstrada.

(b) Determine os pontos de inflexão de f.

(c) Calcule os limites no infinito de f.

(d) Esboce o gráfico de f

Integrais

22) Mostre que, para todo inteiro positivo n, tem-se:

$$\text{(a)} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \leq \frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{(b)} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \geq \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n+1}\right)(n+1)^{\frac{3}{2}}.$$

`Sugestão`: Dados uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e um inteiro $n > 0$, $s_n \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S_n$; sendo $s_n = \sum_{i}^{n} f(c_i)\Delta x$, $S_n = \sum_{i}^{n} f(d_i)\Delta x$, sendo $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e c_i e d_i pontos de mínimo e de máximo, respectivamente, de f no intervalo $[a+(i-1)\Delta x, a+i\Delta x]$. Aplique este resultado para a função $f(x) = \sqrt{x}$ no intervalo $[0,1]$. As desigualdades que desejamos provar serão uma consequência simples da desigualdade que você obtiver assim.

`Observação`: Valem as desigualdades estritas ($<$ no (a) e $>$ no (b)), pois vale a desigualdade estrita $s_n < \int_a^b f(x)\,dx < S_n$ quando f não é constante.

23) Mostre que, para todo, inteiro $n > 1$, tem-se:

$$\text{(a)} \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{i} < \int_1^n \sqrt{x}\,dx < \sum_{i=2}^{n} \sqrt{i},$$

$$\text{(b)} \frac{1}{3}(2n^{3/2}+1) < \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} < \frac{2}{3}[(n+1)^{3/2} - 1].$$

`Observação`: A título de ilustração, fazendo $n = 16$, temos: $\frac{1}{3}(2 \cdot 16^{3/2} + 1) = 43$ e, com duas casas decimais corretas, $\sum_{i=1}^{16} \sqrt{i} \simeq 44,47$ e $\frac{2}{3}(17^{3/2} - 1) \simeq 46,06$.

24) Considere a função $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto de inflexão de Si.

(b) Mostre que $\text{Si}''(x) < 0$ se $0 < x < \pi$.

(c) Mostre que Si tem um ponto de inflexão no intervalo $(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$.

25) Para cada inteiro $n \geq 0$, defina $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx$ e $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n} x\,dx$.

(a) Mostre que, para cada $n \geq 1$, temos $I_n = (2n-1)(I_{n-1} - I_n)$.

`Sugestão`: use a fórmula $\int uv' = uv - \int u'v$ para $v'(x) = \cos x$.

(b) Mostre que, para cada $n \geq 1$, temos $I_n = n(2n-1)J_{2n-1} - 2n^2 J_n$.

`Sugestão`: use a fórmula $\int uv' = uv - \int u'v$ primeiro para $v'(x) = 1$ e depois para $v'(x) = 2x$.

`Observação`: Essas identidades podem ser usadas para demonstrar a famosa fórmula de Euler

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6},$$

veja http://www.ime.usp.br/∼toscano/disc/calculo/MonthlyGem.jpg.

26) (Stewart, 6.1.1) Ilustre com uma figura e calcule a área da região do plano delimitada pela parábola $y = 5x - x^2$ e pela reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(4, 4)$.

27) (Stewart, 6.1.22) Ilustre com uma figura e calcule a área da região do plano delimitada pela curva $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ e pela reta $y = x$.

28) (Stewart 6.1.29-30) Use integrais para calcular a área do triângulo com os vértices dados.

(a) $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(-1, 6)$ (b) $(0, 5)$, $(2, -2)$, $(5, 1)$

Solução do 23

`Sugestão`: Acompanhe a leitura da solução abaixo rabiscando uma figura.

(a) Vamos usar que

$$\int_1^n \sqrt{x}\,dx = \int_1^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^3 \sqrt{x}\,dx + \int_3^4 \sqrt{x}\,dx + \cdots + \int_{n-1}^n \sqrt{x}\,dx.$$

Podemos estimar, inferiormente e superiormente, cada parcela do segundo membro desta igualdade observando que a função $\sqrt{\ }$ é crescente: para cada i inteiro, $1 \leq i \leq n-1$, temos $\sqrt{i} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{i+1}$, para todo $x \in [i, i+1]$, e, portanto, $\sqrt{i} \leq \int_i^{i+1} \sqrt{x}\,dx \leq \sqrt{i+1}$. Segue que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{i} \leq \int_1^n \sqrt{x}\,dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{i+1} = \sum_{i=2}^{n} \sqrt{i},$$

como queríamos.

(b) Podemos determinar o valor da integral que aparece na desigualdade demonstrada no item (a) usando o teorema fundamental do cálculo:

$$\int_1^n \sqrt{x}\,dx = \left.\frac{2x^{3/2}}{3}\right|_1^n = \frac{2}{3}[n^{3/2} - 1].$$

Logo, temos

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{i} < \frac{2}{3}(n^{3/2} - 1) < \sum_{i=2}^{n} \sqrt{i}.$$

Escrevendo $n+1$ no lugar de n nesta desigualdade (isto é lícito, pois ela foi demonstrada para qualquer n inteiro), vem:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} < \frac{2}{3}[(n+1)^{3/2} - 1] < \sum_{i=2}^{n+1} \sqrt{i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} + \sqrt{n+1} - 1 < \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\right) - 1.$$

Daí segue que

$$\frac{2}{3}[(n+1)^{3/2} - 1] + 1 < \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} < \frac{2}{3}[(n+1)^{3/2} - 1].$$

A estimativa pedida segue de

$$\frac{2}{3}[(n+1)^{3/2} - 1] + 1 = \frac{2}{3}(n+1)^{3/2} + \frac{1}{3} > \frac{1}{3}(2n^{3/2} + 1),$$

que decorre da função $(x \mapsto x^{2/3})$ ser crescente.

`Observação`: Estimativas inferiores mais precisas (mas talvez menos simpáticas) poderiam ter sido (talvez mais naturalmente) obtidas.