AS EQUAÇÕES DE COBB-DOUGLAS

USP – MAT 0147 – 2016

AULA DE 26 DE SETEMBRO

As *equações de Cobb-Douglas* são o sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \alpha\,\dfrac{f}{x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \beta\,\dfrac{f}{y} \end{cases}, \tag{1}$$

em que α e β são constantes positivas. É fácil verificar que, para qualquer constante b, a função $f(x,y) = bx^\alpha y^\beta$ satisfaz (1). O objetivo desta nota é mostrar que qualquer função positiva f definida no quadrante $D = \{(x,y);\ x > 0,\ y > 0\}$ que satisfaça (1) é da forma $f(x,y) = bx^\alpha y^\beta$, para alguma constante $b > 0$. Ou seja, essas soluções de (1) que podem ser descobertas por inspeção são na verdade as únicas soluções de (1) definidas em D.

Seja portanto f uma função definida em D satisfazendo (1). Segue da primeira das equações em (1) que, para todo $(x,y) \in D$,

$$\frac{1}{f(x,y)}\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\alpha}{x}.$$

Usando que

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln f(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{e que} \quad \frac{\partial}{\partial x}\ln x^\alpha = \alpha\frac{\partial}{\partial x}\ln x = \frac{\alpha}{x},$$

segue que

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\ln x^\alpha,$$

logo

$$\frac{\partial}{\partial x}[\ln f(x,y) - \ln x^\alpha] = \frac{\partial}{\partial x}\ln\left[\frac{f(x,y)}{x^\alpha}\right] = 0$$

Se uma função definida em D tem derivada parcial em relação a x nula, então ela depende só de y, isto é, existe uma função de uma variável φ tal que

$$\frac{f(x,y)}{x^\alpha} = \varphi(y), \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in D,$$

ou seja,

$$f(x,y) = \varphi(y)x^\alpha. \tag{2}$$

Vamos agora determinar φ. Segue de (2) que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi'(y)x^\alpha \quad \text{e que} \quad \frac{f(x,y)}{y} = \frac{\varphi(y)x^\alpha}{y}.$$

Substituindo isso na segunda das equações em (1), vem

$$\varphi'(y)\, x^{\alpha} = \beta\, \frac{\varphi(y)\, x^{\alpha}}{y}.$$

Cancelando x^{α} e passando $\varphi(y)$ para o primeiro membro, obtemos

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \frac{\beta}{y}$$

Usando que

$$\frac{d}{dy}\ln(\varphi(y)) = \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \quad \text{e que} \quad \frac{d}{dy}\ln y^{\beta} = \beta \frac{d}{dy}\ln y = \frac{\beta}{y},$$

Segue que

$$\frac{d}{dy}\{\ln[\varphi(y)] - \ln y^{\beta}\} = \frac{d}{dy}\ln\frac{\varphi(y)}{y^{\beta}} = 0.$$

Logo, $\ln\frac{\varphi(y)}{y^{\beta}}$ é constante; logo, $\frac{\varphi(y)}{y^{\beta}}$ é constante. Chamando de b essa última constante, vem que $\varphi(y) = by^{\beta}$. Substituindo isto em (2), vem

$$f(x,y) = bx^{\alpha}y^{\beta}, \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in D, \tag{3}$$

como queríamos.

A função em (3), conhecida como *função de Cobb-Douglas*, foi usada por Cobb e Douglas para modelar a produtividade da economia dos Estados Unidos nas duas primeiras décadas do século 20. As variáveis x e y representam o investimento em trabalho e capital e $f(x,y)$ a produção. Naturalmente espera-se que uma tal função satisfaça

$$f(mx,my) = mf(x,y) \quad \text{para todo} \quad (x,y), \quad \text{se} \quad m > 0. \tag{4}$$

Segue de (3) que $f(mx,my) = m^{\alpha+\beta}f(x,y)$. Devemos ter portanto $\alpha + \beta = 1$ em (1) para que a propriedade (4) seja satisfeita.