MAT0315 - Introdução à Análise Real

IME-USP, 2° Semestre de 2013

Quarto Trabalho de Sala em Grupo

Este trabalho é uma aplicação da fórmula

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma, \tag{1}$$

onde γ é uma constante maior do que $1/2$ e menor do que 1, para provar a fórmula

$$1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{2}{12}+\cdots=\ln 3.$$

....

Considere a_n, $n\in\mathbb{N}$, definidos por

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{n} \text{ se } n \text{ não é divisível por 3}\\ -\frac{2}{n} \text{ se } n \text{ é divisível por 3}\end{cases}$$

e denote por s_n a soma parcial $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

(a) Use (1) para mostrar que existe uma sequência (r_n) tal que $r_n\to 0$ e

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma+r_n,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

(b) Mostre por indução que

$$s_{3n}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right),\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

(c) Use os dois itens anteriores para mostrar que $\lim_{n\to\infty} s_{3n}=\ln 3$.

(d) Usando que $s_{3n+1}=s_{3n}+a_{3n+1}$ e que $s_{3n+2}=s_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2}$, mostre que $\lim_{n\to\infty} s_{3n+1}=\lim_{n\to\infty} s_{3n+2}=\ln 3$ e assim conclua que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\ln 3.$$