MAT0315 - Introdução à Análise Real

IME-USP, 2° Semestre de 2013

Terceiro Trabalho de Sala em Grupo

O objetivo deste trabalho é demonstrar o seguinte resultado: se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de números reais tal que $x_n \longrightarrow a \in \mathbb{R}$, então a seqüência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$y_n := \frac{\sum_{1\leq j\leq n} x_j}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ é tal que $y_n \longrightarrow a$. Para tanto, vamos primeiramente demonstrar tal resultado supondo-se que $a = 0$, e é isso que faremos nos ítens a), b) e c).

Dado $\epsilon > 0$,

a) argumente que existe $M > 0$ satisfazendo $|x_n| < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$; mostre que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que, para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, tem-se que $|x_n| < \frac{\epsilon}{2}$;

b) mostre que $|y_n| \leq \frac{Mn_0}{n} + \frac{\epsilon}{2}$, para todo $n \geq n_0$;

c) conclua que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| < \epsilon$, para $n \geq n_1$. Conclua portanto que $y_n \longrightarrow 0$, como queríamos mostrar.

d) Mostre agora o resultado mais geral (isto é, supondo-se que o limite a não é necessariamente igual a zero): se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de números reais tal que $x_n \longrightarrow a \in \mathbb{R}$, então a seqüência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $y_n := \frac{\sum_{1\leq j\leq n} x_j}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ é tal que $y_n \longrightarrow a$.