MAT0315 - Introdução à Análise Real

IME-USP, 2° Semestre de 2013

Primeiro Trabalho de Sala em Grupo

O objetivo do trabalho é dar uma demonstração geométrica de que o lado e a diagonal de um pentágono regular são incomensuráveis. Os itens abaixo são o roteiro de uma possível solução para o problema. Esse roteiro é a apenas uma sugestão. Variações desse roteiro são aceitáveis, ou mesmo soluções seguindo um enfoque diferente, desde que atinjam o mesmo objetivo.

Dado um pentágono regular ABCDE, seja F a interseção das diagonais $\overline{\mathrm{AC}}$ e $\overline{\mathrm{BE}}$, seja G a interseção das diagonais $\overline{\mathrm{AC}}$ e $\overline{\mathrm{BD}}$, seja H a interseção das diagonais $\overline{\mathrm{BD}}$ e $\overline{\mathrm{CE}}$, seja I a interseção das diagonais $\overline{\mathrm{CE}}$ e $\overline{\mathrm{AD}}$, seja J a interseção das diagonais $\overline{\mathrm{AD}}$ e $\overline{\mathrm{BE}}$.

(a) Mostre que os triângulos ΔABC e ΔADE são congruentes.

(b) Mostre que os triângulos ΔABF e ΔAJE são congruentes.

(c) Mostre que AE=FE e que AJ=JE=GJ.

(d) Mostre que o pentágono FGHIJ é regular.

(e) Denotando por l_0 e d_0, respectivamente, a medida do lado e da diagonal do pentágono ABCDE e por l_1 e d_1 a medida do lado e da diagonal do pentágono FGHIJ, mostre que $l_1 = 2l_0 - d_0$ e $d_1 = l_0 - l_1$.

Chame de P_0 o pentágono ABCDE e de P_1 o pentágono FGHIJ. Repita o processo usado para obter P_1 a partir de P_0 para obter o pentágono regular P_2 a partir de P_1, em seguida obtenha P_3 a partir de P_2, depois P_4, e assim sucessivamente. Denote por l_n e d_n a medida do lado e da diagonal do pentágono P_n.

(g) Mostre que, para todo $n \geq 1$, $\dfrac{l_{n-1}}{l_n} = \dfrac{d_n}{l_n} + 1$. Conclua daí que existe uma constante $\alpha > 1$ tal que $\dfrac{l_{n-1}}{l_n} = \alpha + 1$ para todo $n \geq 1$.

(h) Mostre que, para todo $\sigma > 0$, existe n tal que $l_n < \sigma$.

(i) Mostre que, para todo $n \geq 2$, $l_n = 3l_{n-1} - l_{n-2}$. Conclua daí que, se existirem um real positivo σ e inteiros positivos p_0 e q_0 tais que $l_0 = p_0\sigma$ e $d_0 = q_0\sigma$, então existem inteiros positivos p_n tais que $l_n = p_n\sigma$.

(j) Conclua que o lado e a diagonal do pentágono ABCDE são incomensuráveis.