MAT0315 - Introdução à Análise Real
IME-USP, 2° Semestre de 2013
Quarta Lista

(**1**) (a) Dados arbitrários $a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $n \in \mathbb{N}$, mostre que $\sum_{n=1} \frac{a_n}{10^n}$ converge. O que isto tem a ver com expansão decimal?

(**2**) Dados arbitrários $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, mostre que:

(a) se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge;

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n+1} = 0$;

(c) se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ diverge;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge.

Dicas: (a) comparação; (b) inverta a função $f(t) = t/(t+t)$; (c) comparação, usando que $a_n < 1$ para todo n suficientemente grande; (d) o caso não coberto por (a) ou (c) segue do critério do termo geral, junto com o (b).

(**3**) Mostre que

$$\text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = 1, \qquad \text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-2}{n!} = 3, \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = 2e.$$

Dicas: No (a) e no (b), calcule algumas somas parciais, adivinhe a fórmula geral e demonstre-a por indução. No (c), use o (b) e o valor da soma de uma série notável, calculado em sala.

(**4**) Determine para que valores de x convergem absolutamente, convergem condicionalmente, ou divergem as séries:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2} x^n, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} x^n, \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n,$$

$$\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n, \qquad \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n, \qquad \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^{n^2}.$$