MAT0315 - Introdução à Análise Real
IME-USP, 2° Semestre de 2013
Terceira Lista

(**1**) Usando as fórmulas demonstradas em sala ou no livro-texto, calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^{1/n} + \frac{\cos n}{n}}{2^{1/n} + \frac{1}{n^3}}$.

(**2**) (a) Dê exemplo de uma sequência (a_n) tal que $a_n > 0$ para todo n, $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ e $\lim a_n = +\infty$.

(b) Dê exemplo de uma sequência (b_n) tal que $b_n > 0$ para todo n, $\lim \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1$ e $\lim b_n = 10$.

(c) Dê exemplo de uma sequência (c_n) tal que $c_n > 0$ para todo n, $\lim \dfrac{c_{n+1}}{c_n} = 1$ e $\lim c_n = 0$.

(**3**) (a) Mostre que $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n^2}} = 1$. (b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} (2 + n^{1/n})^{1/n} = 1$.

Dica: Leia a sugestão do Exercício 17 da Seção 4.2 do livro-texto.

(**4**) Mostre que $\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} = +\infty$.

(**5**) (a) Mostre que, se a_{n+1}/a_n converge para um limite maior do que 1 ou se tende a infinito, então $\lim a_n = +\infty$.

(b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^{n^2}}{n!} = +\infty$.

(**6**) (a) Mostre que, se $x_n \geq 0$ para todo n e se $\lim x_n = 0$, então $\lim \sqrt{x_n} = 0$.

(b) Dado $L > 0$, mostre que, para todo $x > L/4$, temos $|\sqrt{x} - \sqrt{L}| \leq \dfrac{2}{3\sqrt{L}}|x - L|$. Dica: $a - b = \dfrac{a^2 - b^2}{a + b}$.

(c) Mostre que, se $x_n \geq 0$ para todo n e se $\lim x_n = L$, $L > 0$, então $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{L}$.

(**7**) (a) Mostre que, se $\lim x_n = L$ e $L > 1$, então $\lim (x_n)^n = +\infty$ e $\lim (x_n)^{1/n} = 1$.

(b) Mostre que $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n = 1$.

(**8**) (a) Mostre que são convergentes as sequências (a_n) e (b_n), $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$ e $b_n = \dfrac{1}{na_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

*(b) Tente calcular os limites das duas sequências do item anterior.

(**9**) Decida se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) Se a sequência (a_n) é limitada e não converge para L, então (a_n) tem uma subsequência convergente cujo limite é diferente de L.

(b) Se as sequências (a_n) e (b_n) são de Cauchy, e se $b_n \neq 0$ para todo n, então (a_n/b_n) é uma sequência de Cauchy.