MAT0315 - Introdução à Análise Real

IME-USP, 2° Semestre de 2013

Segunda Lista

(**1**) Seja $A = \left\{ \dfrac{n+m}{n+m+1};\, n \in \mathbb{N},\, m \in \mathbb{N} \right\}$. (a) Mostre que $\sup A = 1$. (b) Mostre que $\inf A = 2/3$.
(Não esqueçam que nossa convenção é que $0 \notin \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$.)

(**2**) Seja $A = \left\{ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m};\, n \in \mathbb{N},\, m \in \mathbb{N} \right\}$.
(a) Mostre que $\sup A = 1 \notin A$. (b) Mostre que $\inf A = -1 \notin A$.

(**3**) (a) Dados A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ não-vazios e limitados tais que $A \subseteq B$, mostre que $\sup A \leq \sup B$ e que $\inf A \geq \inf B$.

(b) Dê exemplo de dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ não-vazios e limitados A e B tais que A seja um subconjunto próprio de B (ou seja, A está contido em B mas é diferente de B) e temos: (i) $\sup A = \sup B$, (ii) $\inf A = \inf B$ e (iii) o supremo e o ínfimo de B não pertencem a B.

(**4**) Dados A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ não-vazios e limitados, defina

$$A + B = \{a + b;\, a \in A,\, b \in B\}.$$

(a) Mostre que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
(b) Mostre que $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

(**5**) Um *corte de Dedekind* é um par ordenado (A, B) onde A e B são subconjuntos não-vazios de $\mathbb{Q}$ tais que A não possui máximo, $A \cup B = \mathbb{Q}$ e, dados $x \in A$ e $y \in B$ quaisquer, tem-se $x < y$. Mostre que, para um corte de Dedekind (A, B), vale $\sup A = \inf B$.

(**6**) Sejam $B \subset A$ conjuntos não-vazios de números reais. Suponha que, para cada $x \in A$, exista um $y \in B$ tal que $x \leq y$. Mostre que, nestas condições, tem-se $\sup A = \sup B$. Enuncie e demonstre um resultado análogo para inf.