MAT0315 - Introdução à Análise Real
IME-USP, 2° Semestre de 2013
Primeira Lista

(**1**) Mostre que, se não for inteira, a raiz quadrada de um número natural será irracional.

(**2**) Dados a e b racionais, mostre que $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ só é racional se $a = b = 0$.

(**3**) Mostre que o logaritmo de 3 na base 2 é irracional.

(**3'**) Mostre que existem a racional e b irracional tais que a^b é racional.

(**4**) Mostre que existem a racional e b irracional tais que a^b é irracional.
Dica: Calcule $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ e reflita sobre o significado do resultado.

(**5**) Mostre que existem a e b irracionais tais que a^b é racional.
Dica: Calcule $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ e reflita sobre o significado do resultado.

(**6**) Dados $a < b$ reais, encontre uma bijeção do intervalo aberto (a, b) em $\mathbb{R}$ que seja igual ao quociente de duas funções polinomiais.

(**7**) Mostre que, se $A \cup B$ for infinito não-enumerável, então pelo menos um dos dois conjuntos, A ou B, também o será.

(**8**) Mostre que o conjunto $\{x \in \mathbb{Q}; x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$ não tem mínimo, usando apenas que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado arquimediano (ou seja, usando apenas as propriedades usuais da soma, do produto e das desigualdades e usando que, para todo $r \in \mathbb{Q}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > r$).