MAT0334 - ANÁLISE MATEMÁTICA II

IME-USP, PRIMEIRO SEMESTRE DE 2011
OITAVA LISTA

(1) Dados y e z no espaço de Hilbert H, defina $T_{yz} : H \to H$, $T_{yz}(x) = \langle x, y\rangle z$.
   (a) Ache o adjunto de T_{yz}.
   (b) Mostre que todo operador linear de posto finito é uma combinação linear de operadores do tipo acima.
   (c) Mostre que se $F : H \to H$ é um operador linear limitado de posto finito, então seu adjunto também é de posto finito.

(2) Seja H espaço de Hilbert de dimensão infinita. Mostre que existe aplicação linear $T : H \to H$ que não é contínua e com imagem unidimensional [1].
Esboço de uma solução: Seja M o espaço (algebricamente) gerado por um conjunto ortonormal enumerável infinito $\mathcal{O}$. Pelo Teorema de Baire, $M \neq H$. Segue então do Lema de Zorn que existe uma base (algébrica) de H contendo $\mathcal{O}$ e um elemento do fecho de M que não pertence a M. Logo, existe $T : H \to \mathbb{C}$ linear que se anula em M, mas não no fecho de M.

(3) Dado $1 \leq p \leq \infty$ e dada $(a_n)_n$ uma sequência limitada de números complexos, defina $M : \ell^p \to \ell^p$ por $M((x_n)_n) = (a_n x_n)_n$. Mostre que M é compacto se e somente se $\lim_n a_n = 0$.

(4) Dada $a : (0,1) \to \mathbb{C}$ contínua e limitada, defina $M : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ por $(Mf)(x) = a(x)f(x)$. Mostre que, se M for compacto, então a é nula.

(5) Dada $a : [0,1] \to \mathbb{C}$ contínua e limitada, defina $M : C([0,1]) \to C([0,1])$ por $(Mf)(x) = a(x)f(x)$. Mostre que, se M for compacto, então a é nula.

(6) Problema 77 de http://www.ime.usp.br/~toscano/disc/af.pdf .

[1] Logo, a hipótese de F ser limitado no item (c) da questão anterior é indispensável: nem todo operador de posto finito é limitado.