MAT0334 - ANÁLISE MATEMÁTICA II

IME-USP, PRIMEIRO SEMESTRE DE 2011
SÉTIMA LISTA

(1) (a) Dada $f \in C^1([0,\pi])$, mostre que existe $u \in C([0,\pi] \times [0,+\infty))$ cuja restrição a $[0,\pi] \times (0,+\infty)$ é de classe C^∞ e que satisfaz

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (x,t) \in [0,\pi] \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,\pi] \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

(b) Existem as "derivadas parciais laterais" $\lim_{h\to 0^+} \frac{u(0+h,0)-u(0,0)}{h}$ e $\lim_{h\to 0^-} \frac{u(\pi+h,0)-u(\pi,0)}{h}$? Podem ser não nulas?

(2) (a) Dada $f \in C^1([0,\pi])$, $f(0) = 0$, mostre que existe $u \in C([0,\pi] \times [0,+\infty))$ cuja restrição a $[0,\pi] \times (0,+\infty)$ é de classe C^∞ e que satisfaz

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (x,t) \in [0,\pi] \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

(b) Existe a "derivada parcial lateral" $\lim_{h\to 0^-} \frac{u(\pi+h,0)-u(\pi,0)}{h}$? Pode ser não nula?

(3) Dada $g \in C([0,1])$, defina $M : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ por $(Mf)(x) = g(x)f(x)$. Mostre que o espectro de M é igual à imagem de g.

(4) Dada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$, defina $M : \ell^2 \to \ell^2$ por $M((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mostre que o espectro de M é igual ao fecho de $\{a_n;\, n \in \mathbb{N}\}$.

(5) Ache o espectro do operador de Volterra

$$V : C([0,1]) \to C([0,1]), \quad (Vf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$