MAT0334 - ANÁLISE MATEMÁTICA II

IME-USP, PRIMEIRO SEMESTRE DE 2011
SEXTA LISTA

Aqui $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ não contém o zero.

(1) Seja M um subespaço de um espaço de Hilbert H e seja $f : M \to \mathbb{C}$ um funcional linear contínuo. Mostre que existe um único funcional linear contínuo $F : H \to \mathbb{C}$ que restrito a M é igual a f e com norma igual à de f.

(2) Mostre que todo espaço de Hilbert é reflexivo.

(3) Mostre que existe um funcional linear contínuo F em ℓ^∞ tal que $F((1 + (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}) = i$ e $F((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_n x_n$ se o limite existir.

(4) Seja $c_0 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}};\ x_n \in \mathbb{C}$ para todo n e $\lim_n x_n = 0\}$
   (a) Mostre que c_0 é um subsepaço fechado de ℓ^∞.
   (b) Mostre que, dado $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, a fórmula $T_a(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j$ define um funcional linear contínuo T_a em c_0 cuja norma é igual a $||a||_1$.

(5) Seja $X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}};\ x_n \in \mathbb{C}$ para todo n e $\sup_n \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| < \infty\}$.
   (a) Mostre que $||(x_n)_{n\in\mathbb{N}}|| = \sup_n \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|$ define uma norma em X e que X é completo com ela.
   (b) Mostre que $Y = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}};\ x_n \in \mathbb{C}$ para todo n e $\lim_n \sum_{k=1}^{n} x_k$ existe$\}$ é um subespaço fechado de X.
   (c) Mostre que ℓ^1 é um subespaço denso de Y e que a inclusão de ℓ^1 em X é contínua.
   (d) Mostre que as inclusões $\ell^1 \subset Y \subset X$ são próprias.